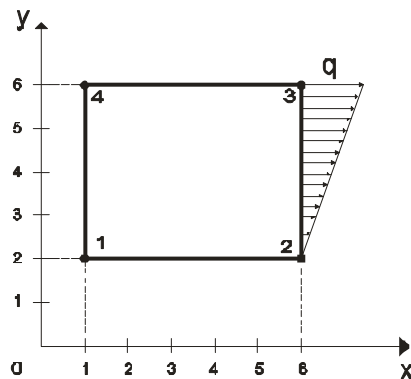


KIỂM TRA HỌC KỲ
Môn học: Tính toán số các cấu trúc
Được phép tham khảo tài liệu
Thời gian: 90 phút

Câu 1

(4 đ)

Xét phần tử tứ giác 4 nút (hình 1.1) với giá trị các biến nút liên kết theo thứ tự với các nút 1, 2, 3, 4 có giá trị lần lượt là $t_1 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = 42 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_3 = 40,5 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_4 = 41 \text{ }^\circ\text{C}$.



Hình 1.1

Cho biết tọa độ các nút như sau:

Nút 1: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; nút 2: $x_2 = 6$, $y_2 = 2$; nút 3: $x_3 = 6$, $y_3 = 6$; nút 4: $x_4 = 1$, $y_4 = 6$

1/ Hãy nội suy nhiệt độ tại điểm $M(3, 3)$ bằng hai phương pháp:

a- Dùng phần tử tham chiếu

b- Dùng phần tử thực

2/ Tính nhiệt độ trung bình trên phần tử thực.

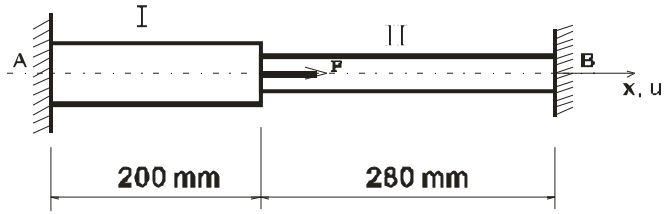
3/ Xác định tải nút tương đương

4/ Nút 3 tịnh tiến theo chiều trục tung 1 đơn vị. Các nút còn lại vẫn ở vị trí cũ, hãy xác định các hàm nội suy của phần tử tứ giác mới này.

Câu 2

(4 đ)

Xét thanh chịu lực dọc trục $F = 100 \text{ kN}$. gồm 2 đoạn thanh (Hình 2.1). Đoạn thanh I có mô đun đàn hồi vật liệu $E_1 = 70.000 \text{ MPa}$, diện tích mặt cắt ngang $A_1 = 300 \text{ mm}^2$. Đoạn thanh II có mô đun đàn hồi vật liệu $E_2 = 200.000 \text{ MPa}$, diện tích mặt cắt ngang $A_2 = 100 \text{ mm}^2$. Vách A tuyệt đối cứng, vách B có độ cứng hữu hạn $k = 25.000 \text{ N/mm}$.



Hình 2.1

Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- 1/ Chuyển vị nút.
- 2/ Phản lực gối tựa.
- 3/ Ứng suất trung bình trong đoạn thanh I và trong đoạn thanh II.

Câu 3

(2 đ)

So sánh phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp sai phân hữu hạn trong lĩnh vực cơ học vật rắn biến dạng (bản chất, ưu nhược điểm, phạm vi ứng dụng)

GV ra đề.....PGS-TS Phan Đình Huân

Bộ mônPGS-TS Phạm Huy Hoàng

Bài giải

Câu 1

(4 điểm)

1/

- Dùng phần tử thực:
Các hàm nội suy có dạng:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{20}(x - 6)(y - 6)$$

$$N_2(x, y) = -\frac{1}{20}(x - 1)(y - 6)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{20}(x - 1)(y - 2)$$

$$N_4(x, y) = -\frac{1}{20}(x - 6)(y - 2)$$

$$t_M = N_1(x, y).t_1 + N_2(x, y).t_2 + N_3(x, y).t_3 + N_4(x, y).t_4$$

$$\Rightarrow t_M = 40,8^{\circ}C$$

- Dùng phần tử tham chiếu:

Biểu thức nội suy hình học:

$$x_M = \bar{N}_1(\xi, \eta).x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta).x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta).x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta).x_4$$

$$y_M = \bar{N}_1(\xi, \eta).y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta).y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta).y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta).y_4$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\text{Với } x_1 = 1, x_2 = 6, x_3 = 6, x_4 = 1$$

$$y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 6, y_4 = 6$$

ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \cdot 6 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \cdot 6 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \cdot 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \cdot 2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \cdot 6 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \cdot 6 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được tọa độ của điểm ảnh M' :

$$\begin{cases} \xi_{M'} = -0,2 \\ \eta_{M'} = -0,5 \end{cases}$$

Nhiệt độ tại M' được nội suy qua biểu thức:

$$t_{M'} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_{M'}, \eta_{M'}) t_i \quad \text{với } t_1 = 40^{\circ}\text{C}, t_2 = 42^{\circ}\text{C}, t_3 = 40,5^{\circ}\text{C}, t_4 = 41^{\circ}\text{C}$$

$$\Rightarrow t_{M'} = (0,45 \times 40) + (0,30 \times 42) + (0,10 \times 40,5) + (0,15 \times 41)$$

$$\Rightarrow t_{M'} = 40,8^{\circ}\text{C}$$

2/ Nhiệt độ trung bình trên phần tử thực là:

$$t_{tb} = \frac{\int_{V^e} \sum_{i=1}^4 N_i(x,y) t_i dV}{A} = \frac{817,5}{20} = 40,875^{\circ}\text{C}$$

3/ Tải nút tương đương

Phương trình đường tải:

$$q(y) = \frac{q}{4} y - \frac{q}{2}$$

Tải nút tương đương được xác định theo biểu thức:

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \int_2^6 \begin{bmatrix} N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \end{bmatrix}_{x=6} q(y) dy = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} q \\ \frac{4}{3} q \end{bmatrix}$$

4/ Hàm nội suy của phần tử tứ giác mới:

Biểu thức tổng quát của hàm nội suy có dạng:

$$u = A + Bx + Cy + Dxy$$

(1)

thay tọa độ các nút 1(1,2);

nút 2(6,2)

nút 3(6,7)

nút 4(1,6)

vào u ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u_1 = A + B + 2C + 2D \\ u_2 = A + 6B + 2C + 12D \\ u_3 = A + 6B + 7C + 42D \\ u_4 = A + B + 6C + 6D \end{cases} \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (2), ta có:

$$A = \frac{9}{5} u_1 + \frac{7}{25} u_2 + \frac{2}{25} u_3 - \frac{3}{5} u_4$$

$$B = -\frac{3}{10} u_1 + \frac{7}{25} u_2 - \frac{2}{25} u_3 + \frac{1}{10} u_4$$

$$C = -\frac{3}{10} u_1 + \frac{1}{25} u_2 - \frac{1}{25} u_3 + \frac{3}{10} u_4$$

$$D = \frac{1}{20} u_1 - \frac{1}{25} u_2 + \frac{1}{25} u_3 - \frac{1}{20} u_4$$

Viết (1) dưới dạng $u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4$, ta có:

$$N_1 = \frac{9}{5} - \frac{3}{10}x - \frac{3}{10}y + \frac{1}{20}xy$$

$$N_2 = -\frac{7}{25} + \frac{7}{25}x + \frac{1}{25}y - \frac{1}{25}xy$$

$$N_3 = \frac{2}{25} - \frac{2}{25}x - \frac{1}{25}y + \frac{1}{25}xy$$

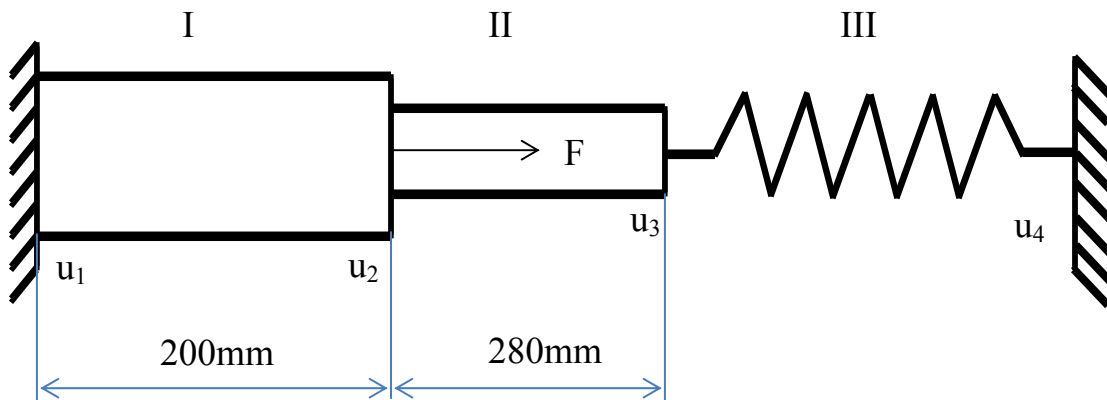
$$N_4 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y - \frac{1}{20}xy$$

Câu 2

(4 điểm)

1/ Chuyển vị nút:

Mô hình tính có dạng như sau:



Ma trận độ cứng phần tử 1:

$$[K^1] = \frac{A_1 E_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105000 & -105000 \\ -105000 & 105000 \end{bmatrix} N/mm$$

Ma trận độ cứng phần tử 2:

$$[K^2] = \frac{A_2 E_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71428.571 & -71428.571 \\ -71428.571 & 71428.571 \end{bmatrix} N/mm$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25000 & -25000 \\ -25000 & 25000 \end{bmatrix} (N/mm)$$

Ma trận độ cứng kết cấu:

$$[K] = \begin{bmatrix} 105000 & -105000 & 0 & 0 \\ -105000 & 176428.571 & -71428.571 & 0 \\ 0 & -71428.571 & 96428.571 & -25000 \\ 0 & 0 & -25000 & 25000 \end{bmatrix} N/mm$$

Đưa điều kiện biên $u_1 = u_4 = 0$ vào hệ phương trình $[K]\{u\} = [F]$, ta được:

$$\begin{bmatrix} 176428.571 & -71428.571 \\ -71428.571 & 96428.571 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Giải hệ phương trình (1), ta có:

$$u_2 \approx 0.81 \text{ mm}$$

$$u_3 \approx 0.60 \text{ mm}$$

2/ Phản lực gối tựa.

Phản lực gối tựa được suy ra từ biểu thức:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 105000 & -105000 & 0 & 0 \\ -105000 & 176428.571 & -71428.571 & 0 \\ 0 & -71428.571 & 96428.571 & -25000 \\ 0 & 0 & -25000 & 25000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 = 0,81 \\ u_3 = 0,6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -85007.49629 \\ 99999.99998 \\ 0 \\ -14992.50376 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_1 = F_1 \approx -85007,5 \text{ N}$$

$$R_4 = F_4 \approx -14992,50 \text{ N}$$

3/ Tính ứng suất trung bình trong các đoạn thanh I và II.

Áp dụng công thức

$$\sigma = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

ta có:

$$\sigma_1 = 283,36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -149,93 \text{ MPa}$$

Câu 3

(2 điểm)

Cần nêu được hai ý chính sau: (tối thiểu)

* Về mặt bản chất:

Cả 2 phương pháp đều là phương pháp số và bản chất của 2 phương pháp là biến đổi PTVP (hệ PTVP) thành hệ phương trình đại số và giải hệ phương trình đại số này.

- Phương pháp phần tử hữu hạn dùng “con đường” tích phân
- Phương pháp sai phân hữu hạn dùng “con đường” sai phân

* Về mặt ứng dụng:

khí

- Phương pháp phần tử hữu hạn thích hợp cho các miền tính phức tạp -> chi tiết cơ
- Phương pháp sai phân hữu hạn thích hợp cho các miền tính đơn giản.