

Bài 1

(3 điểm)

1/ Hàm nội suy

(1 đ)

Hàm nội suy phân tử tam giác 3 nút được xác định qua các biểu thức sau:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - x_3y_2]$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + x_3y_1 - x_1y_3]$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1]$$

Thay tọa độ 3 đỉnh của phần tử tham chiếu, ta được:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta$$

Thay tọa độ 3 đỉnh của phần tử thực, ta được:

$$N_1(x, y) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y + \frac{19}{12}$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

2/ Tải nút tương đương

a/ Dầm không gian thực

(1 đ)

Tải nút tương đương được xác định qua biểu thức sau:

$$\begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \int_1^5 \begin{bmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \end{bmatrix}_{y=1} (-q_0) dx = \int_1^5 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y + \frac{19}{12} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{y=1} (-q_0) dx$$

$$\begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2q_0 \\ -2q_0 \end{bmatrix} đv l$$

b/ Dùng không gian tham chiếu

(1 đ)

Biểu thức nội suy hình học:

$$\begin{aligned}x &= \bar{N}_1(\xi, \eta) \cdot x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) \cdot x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta) \cdot x_3 \\ &= (1 - \xi - \eta) \cdot 1 + (\xi) \cdot 5 + (\eta) \cdot 1 = 4\xi + 1\end{aligned}$$

Ma trận Jacobi: $[J] = \left[\frac{dx}{d\xi} \right] = [4] \Rightarrow \det[J] = 4$

Tải nút tương đương:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \end{bmatrix} &= \int_0^1 \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{\eta=0} (-q_0) \det[J] \cdot d\xi = \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 - \xi - \eta \\ \xi \end{bmatrix}_{\eta=0} (-q_0) \cdot (4) d\xi \\ &= \begin{bmatrix} -2q_0 \\ -2q_0 \end{bmatrix} \text{ đv}l\end{aligned}$$

Bài 2

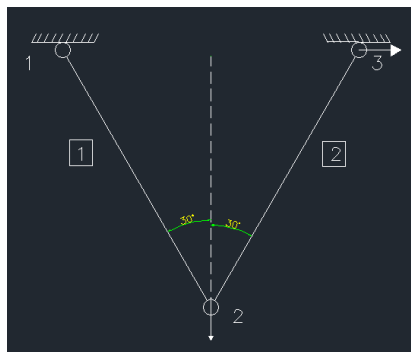
(4 điểm)

- Ma trận độ cứng phần tử và kết cấu (hoặc $[K^*]$) (2 đ)
- Chuyển vị nút do P (1 đ)
- Chuyển vị nút do nhiệt (1 đ)

Kết cấu hệ thanh gồm 2 phần tử:

Phần tử 1 (nút 1 là gốc, nút 2 là ngọn) có diện tích mặt cắt ngang $A = 100\text{mm}^2$, $L = 1000\text{mm}$, mô-đun Young $E_1 = 70000\text{MPa}$. Hệ số giãn nở dài $\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$

Phần tử 2 (nút 2 là gốc, nút 3 là ngọn) có diện tích mặt cắt ngang $A = 100\text{mm}^2$, $L = 1000\text{mm}$, mô-đun Young $E_2 = 200000\text{MPa}$. Hệ số giãn nở dài $\alpha_2 = 11,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$



Xác định chuyển vị của nút 2 trong hai trường hợp:

1/ Kết cấu chỉ chịu tác động của lực $P = 30000\text{ N}$

2/ Khi nhiệt độ tăng một lượng $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ (không có lực P)

Giải

Ma trận độ cứng phần tử được suy ra từ công thức:

$$K_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Thay $A = 100 \text{ mm}^2$, $E_1 = 70.000 \text{ MPa}$, $E_2 = 200.000 \text{ MPa}$, $\Delta t = 60^\circ \text{ C}$, $\alpha_1 = 23.10^{-6}/^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 11,7.10^{-6}/^\circ\text{C}$ vào (2.1), ta có được ma trận độ cứng của 2 phần tử như sau:

Ma trận độ cứng phần tử 1:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1753.219 & 3032.945 & -1753.219 & -3032.945 \\ 3032.945 & 5246.781 & -3032.945 & -5246.781 \\ -1753.219 & -3032.945 & 1753.219 & 3032.945 \\ -3032.945 & -5246.781 & 3032.945 & 5246.781 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

Ma trận độ cứng phần tử 2:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 5009.198 & -8665.558 & -5009.198 & 8665.558 \\ -8665.558 & 14990.802 & 8665.558 & -14990.802 \\ -5009.198 & 8665.558 & 5009.198 & -8665.558 \\ 8665.558 & -14990.802 & -8665.558 & 14990.802 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

Đưa điều kiện biên $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$ vào hệ phương trình

$$[K] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ta được hệ phương trình (2.3) như sau:

$$[K^*] \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

với

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 6762.417 & -5632.613 \\ -5632.613 & 20237.583 \end{bmatrix} N/mm$$

1/

Các chuyển vị nút sinh ra dưới tác dụng của lực P có được bằng cách giải hệ phương trình (2.4) sau:

$$\begin{bmatrix} 6762.417 & -5632.613 \\ -5632.613 & 20237.583 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30000 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = 1.607 \text{ mm} \\ v_2 = 1.929 \text{ mm} \end{cases}$$

2/

Lực nút phần tử 1 khi có Δt :

$$F_1^t = AE_1\alpha_1\Delta t \begin{Bmatrix} -l_1 \\ -m_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4834.441 \\ -8363.240 \\ 4834.441 \\ 8363.240 \end{Bmatrix} (N)$$

Lực nút phần tử 2 khi có Δt :

$$F_2^t = AE_2\alpha_2\Delta t \begin{Bmatrix} -l_2 \\ -m_2 \\ l_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7026.454 \\ 12155.268 \\ 7026.454 \\ -12155.268 \end{Bmatrix} (N)$$

Lực nút kết cấu khi có Δt sau khi đưa điều kiện biên vào có dạng:

$$F^t = \begin{Bmatrix} -2192.013 \\ 20518.508 \end{Bmatrix} (N)$$

Chuyển vị nút do Δt là nghiệm của hệ thống phương trình sau:

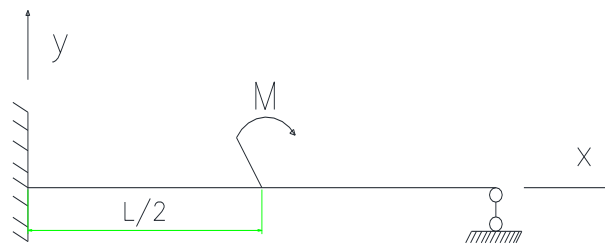
$$\begin{bmatrix} 6762.417 & -5632.613 \\ -5632.613 & 20237.583 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2^t \\ v_2^t \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} -2192.013 \\ 20518.508 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2^t = 0.677 \text{ mm} \\ v_2^t = 1.202 \text{ mm} \end{cases}$$

Bài 3

(3 điểm)

Xét kết cấu dầm có chiều dài L , mô men quán tính mặt cắt ngang I , mô đun đàn hồi Young vật liệu E như ở hình sau:



1/

(1 đ)

Ma trận độ cứng phần tử 1 và phần tử 2

$$K_1 = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$

2/

(1 đ)

Ma trận độ cứng kết cấu:

$$K = \frac{8EI}{L^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L & 0 & 0 \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} & 0 & 0 \\ -12 & -3L & 24 & 0 & -12 & 3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & 0 & 2L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ 0 & 0 & -12 & -3L & 12 & -3L \\ 0 & 0 & 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3/ Chuyển vị nút

(1 đ)

Phương trình $[K].\{u\}=\{F\}$ có dạng:

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L & 0 & 0 \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} & 0 & 0 \\ -12 & -3L & 24 & 0 & -12 & 3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & 0 & 2L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ 0 & 0 & -12 & -3L & 12 & -3L \\ 0 & 0 & 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 = 0 \\ M_2 = -M \\ V_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Đưa điều kiện biên $v_1 = 0, \theta_1 = 0, v_3 = 0$ vào hệ phương trình $[K].\{u\}=\{F\}$, ta được hệ phương trình đại số tuyến tính (3.2):

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 3L \\ 0 & 2L^2 & \frac{L^2}{2} \\ 3L & \frac{L^2}{2} & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Giải hệ phương trình (3.2), ta có được các chuyển vị nút như sau:

$$\begin{cases} u_2 = -\frac{ML^2}{128EI} & (\text{đvcd}) \\ \theta_2 = -\frac{5}{64} \frac{ML}{EI} & (\text{rad}) \\ \theta_3 = \frac{ML}{16EI} & (\text{rad}) \end{cases}$$

F