

ĐÁP ÁN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN (Lớp thầy Phạm Huy Hoàng)

Bài 1 (3 điểm)

$$N_1(x, y) = \frac{(x-240)(y-160)}{240.160} \Rightarrow N_1(120,80) = \frac{(120-240)(80-160)}{240.160} = 0,25$$

$$N_2(x, y) = \frac{-x(y-160)}{240.160} \Rightarrow N_2(120,80) = \frac{-120(80-160)}{240.160} = -0,25$$

$$N_3(x, y) = \frac{xy}{240.160} \Rightarrow N_3(120,80) = \frac{120.80}{240.160} = 0,25$$

$$N_4(x, y) = \frac{(x-240)(-y)}{240.160} \Rightarrow N_4(120,80) = \frac{(120-240)(-80)}{240.160} = 0,25$$

0,5 đ

Chuyển vị của nút A(120,80):

$$u_A = \sum_{i=1}^4 N_i(x_A, y_A) u_i = 0,25.0 + 0,25.0,04 + 0,25.0,4 + 0,25.0 = 0,02 \text{ mm}$$

$$v_A = \sum_{i=1}^4 N_i(x_A, y_A) v_i = 0,25.0 + 0,25.0 + 0,25.(-0,02) + 0,25.(-0,02) = -0,01 \text{ mm}$$

0,5 đ

Có:
$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{y-160}{240.160}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{-(y-160)}{240.160}; \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{y}{240.160}; \quad \frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{-y}{240.160}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{x-240}{240.160}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{-x}{240.160}; \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x}{240.160}; \quad \frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{-(x-240)}{240.160}$$

Ứng suất tại nút A(120,80):

Các biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i = \frac{y-160}{240.160}.0 + \frac{-(y-160)}{240.160}.0,04 + \frac{y}{240.160}.0,04 + \frac{-y}{240.160}.0 = \frac{160}{240.160}.0,04 = 1,667.10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i = \frac{x-240}{240.160}.0 + \frac{-x}{240.160}.0 + \frac{x}{240.160}.(-0,02) + \frac{-(x-240)}{240.160}.(-0,02) = \frac{240}{240.160}.(-0,02) = -1,25.10^{-4}$$

1 đ

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right] = \frac{x-240}{240.160}.0 + \frac{-x}{240.160}.0,04 + \frac{x}{240.160}.0,04 + \frac{-(x-240)}{240.160}.0 + \frac{y-160}{240.160}.0 + \frac{-(y-160)}{240.160}.0 + \frac{y}{240.160}.(-0,02) + \frac{-y}{240.160}.(-0,02) = 0$$

Ma trận độ cứng vãn-liệu:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{200000}{1-0,3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 219780,22 & 65934,07 & 0 \\ 65934,07 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 76923,08 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

0,5 đ

Ứng suất:
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 219780,22 & 65934,07 & 0 \\ 65934,07 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 76923,08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,667.10^{-4} \\ -1,25.10^{-4} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28,3956 \\ -16,4813 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

0,5 đ

Bài 2 (4 điểm)

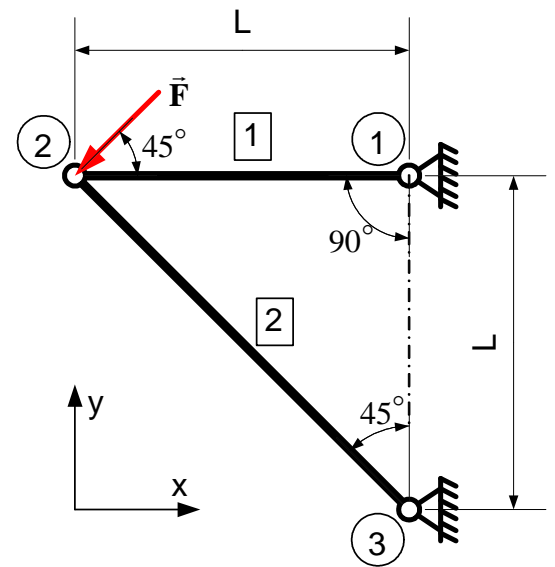
Bảng các phần tử và nút:	phan tu i	1^i	2^i	k_i	θ_i
	1	1	2	$\frac{AE}{L}$	180°
	2	2	3	$\frac{AE}{L\sqrt{2}}$	-45°

0,5 đ

Ma trận độ cứng của phần tử 1:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0,5 đ



Ma trận độ cứng của phần tử 2:

$$\mathbf{K}_2 = \frac{AE}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

0,5 đ

Ma trận độ cứng của cả hệ thống:

$$\mathbf{K} = 10^7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+1/2\sqrt{2} & 0-1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0-1/2\sqrt{2} & 0+1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = 10^7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

0,5 đ

Phương trình quan hệ giữa chuyển vị và ngoại lực:

$$\{F\} = \mathbf{K}\{u\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1x} \\ -F/\sqrt{2} \\ -F/\sqrt{2} \\ R_{3x} \\ R_{3x} \end{Bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

0,5 đ

Đơn giản và giải ra chuyển vị nút 2:

$$\begin{Bmatrix} -F/\sqrt{2} \\ -F/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1000 \\ -1000 \end{Bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 1+1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.10^{-3} \text{ m} \\ -4,828.10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \text{ mm} \\ -4,828 \text{ mm} \end{Bmatrix} \quad \boxed{0,5 \text{ đ}}$$

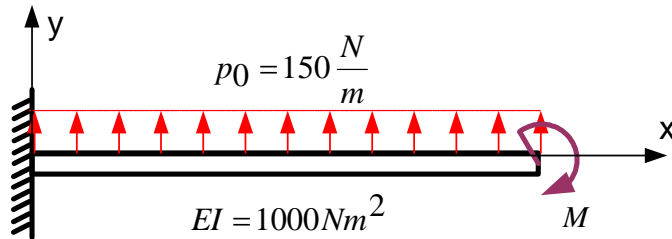
Phản lực tại các gối đỡ:

Gối 1: $R_{1x} = 10^7 [(-1).u_2 + 0.v_2] = 10^7 [(-1).(-0,002) + 0.(-0,004828)] = 20000 \text{ N}$
 $R_{1y} = 10^7 [0.u_2 + 0.v_2] = 10^7 [0.(-0,002) + 0.(-0,004828)] = 0$ $\boxed{0,5 \text{ đ}}$

Gối 3: $R_{3x} = 10^7 [(-1/2\sqrt{2}).u_2 + (1/2\sqrt{2}).v_2] = 10^7 [(-1/2\sqrt{2}).(-0,002) + (1/2\sqrt{2}).(-0,004828)] = -10000 \text{ N}$
 $R_{3y} = 10^7 [(1/2\sqrt{2}).u_2 + (-1/2\sqrt{2}).v_2] = 10^7 [(1/2\sqrt{2}).(-0,002) + (-1/2\sqrt{2}).(-0,004828)] = 10000 \text{ N}$

$\boxed{0,5 \text{ đ}}$

Bài 3 (3 điểm)



Bảng các phần tử và nút:

phan tu	i	2 ⁱ	k _i
1	1	2	$\frac{EI}{L^3}$

Ma trận độ cứng của dầm:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \boxed{0,5 \text{ đ}}$$

Quy đổi lực phân bố về các nút:

$$F_{1p} = \frac{pL}{2} = 75 \text{ N}; \quad M_{1p} = \frac{pL^2}{12} = 12,5 \text{ Nm}; \quad F_{2p} = \frac{pL}{2} = 75 \text{ N}; \quad M_{2p} = -\frac{pL^2}{12} = -12,5 \text{ Nm} \quad \boxed{1 \text{ đ}}$$

Phương trình quan hệ chuyển vị và ngoại lực:

$$\{F\} = K\{u\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R_{1y} + F_{1p} \\ M_{1z} + M_{1p} \\ F_{2p} \\ M + M_{2p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} + 75 \\ M_{1z} + 12,5 \\ 75 \\ -70 - 12,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} + 75 \\ M_{1z} + 12,5 \\ 75 \\ -82,5 \end{Bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1y} = 0 \\ \theta_{1z} = 0 \\ w_{1y} \\ \theta_{1z} \end{Bmatrix}$$

Đơn giản hóa:

$$\begin{Bmatrix} 75 \\ -82,5 \end{Bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \theta_{1z} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \theta_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,01625 \text{ m} \\ -0,045 \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad \boxed{0,5 \text{ đ}}$$

Đầu trục võng: 16,25 mm và xoay xuống góc: 0,045 rad = 1,289°

Phản lực tại ngàm:

$$R_{1y} + 75 = 1000.(-12).w_{1y} + 1000.6.\theta_{1z} = 1000.(-12).(-0,01625) + 1000.6.(-0,045) = -75 \Rightarrow R_{1y} = -150 \text{ N}$$

$$M_{1z} + 12,5 = 1000.(-6).w_{1y} + 1000.2.\theta_{1z} = 1000.(-6).(-0,01625) + 1000.2.(-0,045) = 7,5 \Rightarrow M_{1z} = -5 \text{ Nm}$$

$\boxed{0,5 \text{ đ}}$