Đại Học Quốc Gia TP HCM
Trường Đại Học Bách Khoa
Khoa Cơ Khí
Bộ Môn Thiết Kế Máy

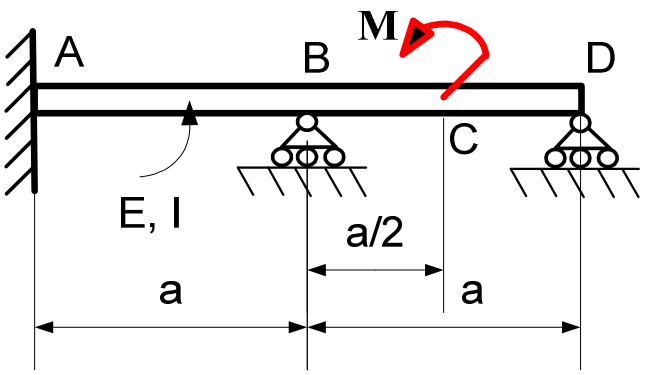
Đề thi Học kỳ I – Năm học 2012 – 2013
Môn: **Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn**
Ngày thi: 21 / 12 / 2012
Thời gian làm bài: **90 phút**
Lưu ý: **Cho phép sử dụng tài liệu**

Bài 1 (4 điểm)

Xét dầm chịu tải là moment **M** như hình vẽ 1. Biết kích thước a và các thuộc tính vật liệu và mặt cắt của dầm là E và I. Hãy xác định:

a. Chuyển vị xoay tại các điểm B và D (3 điểm).

b. Chuyển vị tại điểm C (1 điểm).

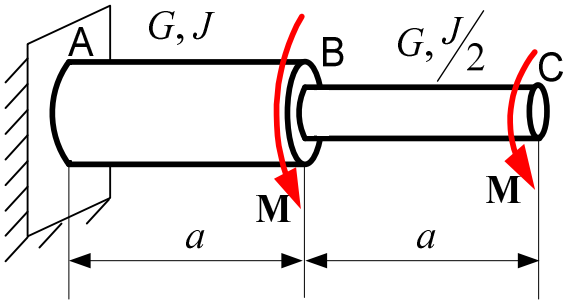


Hình vẽ 1

Bài 2 (2 điểm)

Xét trục chịu xoắn chịu tải là các moment **M** như hình vẽ 2. Biết kích thước a và các thuộc tính vật liệu và mặt cắt của trục AB là G và J, của trục BC là G và $J/2$. Hãy xác định:

Chuyển vị xoay của mặt cắt tại B và C.



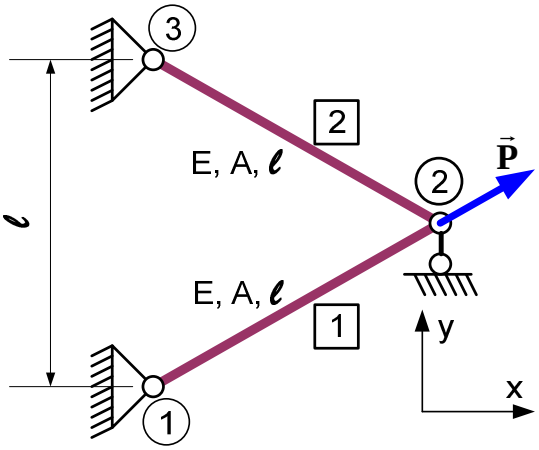
Hình vẽ 2

Bài 3 (4 điểm)

Xét hệ thanh như hình vẽ 3. Tải **P** dọc theo thanh 1.

a. Tìm chuyển vị tại nút 2.

b. Tìm ứng suất trong thanh 2.



Hình vẽ 3

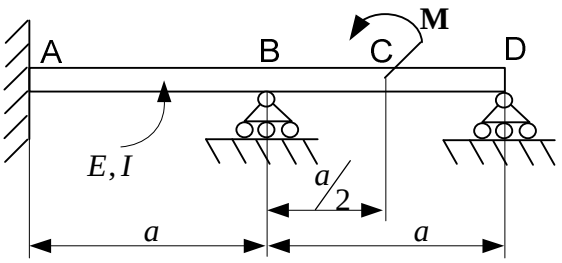
Chủ nhiệm Bộ môn **Phạm Huy Hòang**

Người ra đề **Phạm Huy Hòang**

Đáp án Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn

Bài 1:

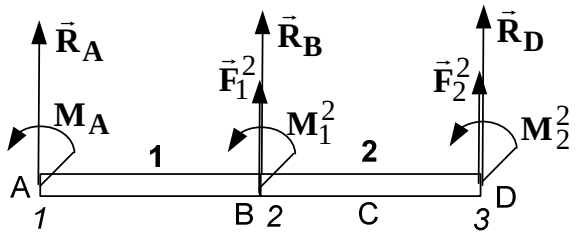
a. Chuyển vị tại các điểm B và D



Chia phần tử

Phần tử **i**	Nút 1^i	Nút 2^i	$\mathbf{k_i}$
1	*1*	*2*	EI/a^3
2	*2*	*3*	EI/a^3

Quy đổi tải về các nút **(1 điểm)**

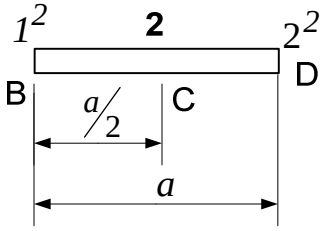


$$F_2 = F_1^2 = -\frac{3}{2}\frac{M}{a}; M_2 = M_1^2 = -\frac{M}{4};$$

$$F_3 = F_2^2 = \frac{3}{2}\frac{M}{a}; M_3 = M_2^2 = -\frac{M}{4}$$

Ma trận độ cứng mở rộng

$$\mathbf{K_1} = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a & 0 & 0 \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6a & 12 & -6a & 0 & 0 \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{K_2} = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6a & -12 & 6a \\ 0 & 0 & 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6a & 12 & -6a \\ 0 & 0 & 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a & 0 & 0 \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6a & 24 & 0 & -12 & 6a \\ 6a & 2a^2 & 0 & 8a^2 & -6a & 2a^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6a & 12 & -6a \\ 0 & 0 & 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng cả cơ hệ **(1 điểm)**

Phương trình, điều kiện biên và ngoại lực **(0,5 điểm)**

$$\frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a & 0 & 0 \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6a & 24 & 0 & -12 & 6a \\ 6a & 2a^2 & 0 & 8a^2 & -6a & 2a^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6a & 12 & -6a \\ 0 & 0 & 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_{z2} \\ 0 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B - 3M/2a \\ -M/4 \\ R_D + 3M/2a \\ -M/4 \end{Bmatrix}$$

Đơn giản và giải tìm chuyển vị $\frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 8a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M/4 \\ -M/4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{z2} = \frac{-Ma}{56EI} \\ \theta_{z3} = \frac{-3Ma}{56EI} \end{cases}$ **(0,5 điểm)**

b. Chuyển vị tại điểm C **(1 điểm)**

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3};\ N_2 = x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2};\ N_3 = 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3};\ N_4 = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2};$$

Có:

$$\frac{dN_1}{dx} = -6\frac{x}{a^2} + 6\frac{x^2}{a^3};\ \frac{dN_2}{dx} = 1 - 4\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2};\ \frac{dN_3}{dx} = 6\frac{x}{a^2} - 6\frac{x^2}{a^3};\ \frac{dN_4}{dx} = -2\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2}$$

Suy ra chuyển vị tại C:

$$y_C = N_1(a/2)y_2 + N_2(a/2)\theta_{z2} + N_3(a/2)y_3 + N_4(a/2)\theta_{z3}$$

$$= 0 + \left(a/2 - 2\frac{(a/2)^2}{a} + \frac{(a/2)^3}{a^2}\right)\left(-Ma/56EI\right) + 0 + \left(-\frac{(a/2)^2}{a} + \frac{(a/2)^3}{a^2}\right)\left(-3Ma/56EI\right)$$

$$= Ma^2/224EI$$

$$\theta_C = \left.\frac{dN_1}{dx}\right|_{x=a/2} y_2 + \left.\frac{dN_2}{dx}\right|_{x=a/2} \theta_{z2} + \left.\frac{dN_3}{dx}\right|_{x=a/2} y_3 + \left.\frac{dN_4}{dx}\right|_{x=a/2} \theta_{z3}$$

$$= 0 + \left(-6\frac{a/2}{a^2} + 6\frac{(a/2)^2}{a^3}\right)\left(-Ma/56EI\right) + 0 + \left(-2\frac{a/2}{a} + 3\frac{(a/2)^2}{a^2}\right)\left(-3Ma/56EI\right)$$

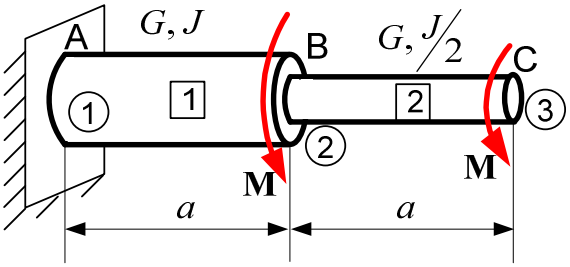
$$= Ma/56EI$$

Bài 2:

a. Chuyển vị tại các điểm C và F

Chia phần tử **(0,5 điểm)**

Phần tử **i**	Nút 1^i	Nút 2^i	k_i
1	*1*	*2*	*GJ / a*
2	*2*	*3*	*GJ / (2a)*



Lập ma trận độ cứng cục bộ và mở rộng

$$\mathbf{K_1} = \frac{GJ}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{K_2} = \frac{GJ}{2a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Ma trận độ cứng cả cơ hệ **(1 điểm)**

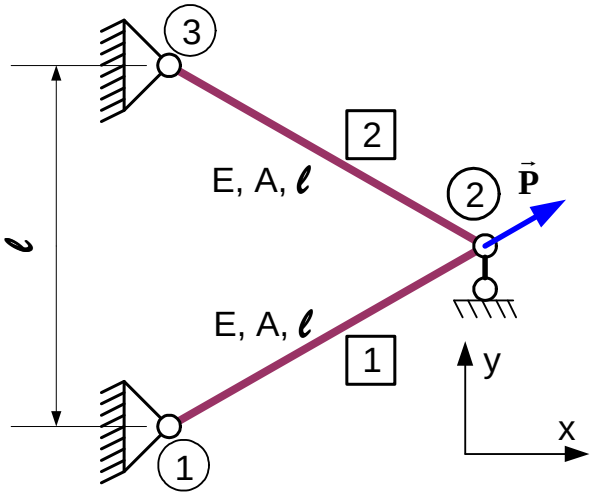
$$\mathbf{K} = \frac{GJ}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Phương trình, điều kiện biên và ngoại lực

$$\frac{GJ}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_B \\ M \\ M \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{GJ}{a}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ M \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{Chuyển vị: } \begin{cases} \theta_2 = \frac{2Ma}{GJ} \\ \theta_3 = \frac{4Ma}{GJ} \end{cases}$$

(0,5 điểm) **0,5 điểm)**

Bài 3:



pt_i	$node_1^i$	$node_2^i$	k_i	θ_i
1	①	②	k	$30^\circ (c^2=\frac{3}{4}, s^2=\frac{1}{4}, cs=\frac{\sqrt{3}}{4})$
2	②	③	k	$150^\circ (c^2=\frac{3}{4}, s^2=\frac{1}{4}, cs=-\frac{\sqrt{3}}{4})$

$$k=\frac{AE}{l}$$

Ma trận độ cứng (1,5 điểm)

$$\mathbf{K}=k\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}+\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Phương trình, điều kiện biên và ngoại lực **(1,5 điểm)**

$$\begin{Bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ P\sqrt{3}/2 \\ R_3^y + P/2 \\ R_3^x \\ R_3^y \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\begin{Bmatrix} x_1=0 \\ y_1=0 \\ x_2 \\ y_2=0 \\ x_3=0 \\ y_3=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow P\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AE}{l}\frac{3}{2}x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{Pl}{\sqrt{3}AE}$$

Biến dạng và ứng suất trong thanh 2 **(1 điểm)**:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{\left(-l\frac{\sqrt{3}}{2}+x_3-x_2\right)^2+\left(\frac{l}{2}+y_3-y_2\right)^2}-l}{l}=\frac{\sqrt{\left(-l\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{Pl}{\sqrt{3}AE}\right)^2+\left(\frac{l}{2}+0-0\right)^2}-l}{l}$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{P^2}{3A^2E^2}+\frac{P}{AE}}-1 \quad \Rightarrow \quad \sigma=E\varepsilon=E\left(\sqrt{1+\frac{P^2}{3A^2E^2}+\frac{P}{AE}}-1\right)$$