

ĐỀ THI HỌC KỲ

Môn học: **Phương pháp phần tử hữu hạn**

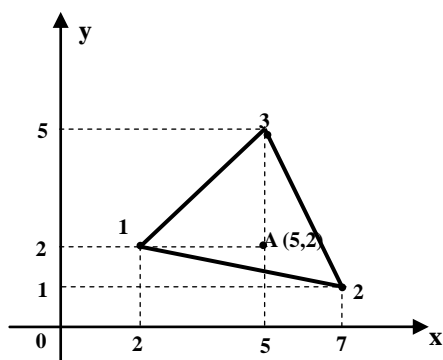
Thời gian: 90 phút Ngày 29-5-2013

Được tham khảo tài liệu

Bài 1

(3 đ)

Xét phần tử tam giác 3 nút. Tọa độ các nút: 1(2,2) ; 2(7,1); 3(5,5) như ở hình 1.1



Hình 1.1

1/ Hãy xác định 3 hàm nội suy

(0,5 đ)

2/ Hãy xác định ma trận [B] biết rằng:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ đ})$$

3/ Cho biết nhiệt độ liên kết với các nút 1, 2, 3 lần lượt là $t_1 = 50^\circ C$, $t_2 = 52^\circ C$, $t_3 = 53^\circ C$. Hãy nội suy nhiệt độ tại điểm A(5,2) bằng hai phương pháp:

a/ Dùng không gian thực

(1 đ)

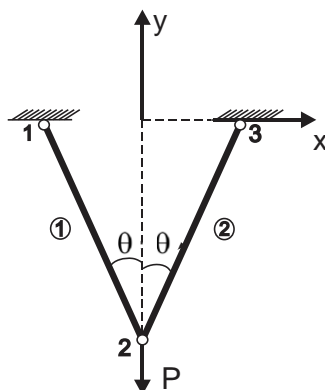
b/ Dùng không gian tham chiếu

(1 đ)

Bài 2

(4 đ)

Xét hệ thanh như ở hình 2.1



Hình 2.1

Phần tử ① có: A, L, E₁, gốc là nút 1, ngọn là nút 2

Phần tử ② có: A, L, E₂, gốc là nút 2, ngọn là nút 3

với A = 100 mm², L = 800 mm, E₁ = 70.000 MPa, E₂ = 190.000 MPa, P = 50 kN, $\theta = 30^\circ$

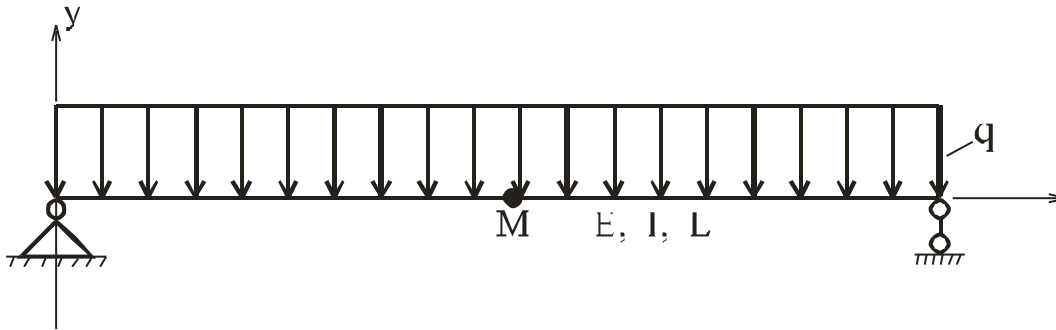
Hãy xác định:

- | | |
|----------------------------|-------|
| 1/ Ma trận độ cứng phần tử | (1 đ) |
| 2/ Ma trận độ cứng kết cấu | (1 đ) |
| 3/ Chuyển vị nút | (1 đ) |
| 4/ Ứng suất phần tử | (1 đ) |

Bài 3

(3đ)

Xét dầm có chiều dài L , vật liệu mô đun đàn hồi Young E , mô men quán tính mặt cắt ngang I . Dầm chịu tải phân bố đều cường độ q (Hình 3.1)



Hình 3.1

Dùng mô hình tính phần tử hữu hạn **một phần tử**, xác định:

- | | |
|---|---------|
| 1/ Ma trận độ cứng phần tử và ma trận độ cứng kết cấu | (0,5 đ) |
| 2/ Chuyển vị nút (các góc xoay θ_1 và θ_2) | (1 đ) |
| 3/ Hãy nội suy chuyển vị thẳng v_M tại M với M là điểm giữa của dầm. So sánh và bình luận | |

kết quả v_M cho bởi phương pháp phần tử hữu hạn với kết quả giải tích $v_M^{gt} = -\frac{5 qL^4}{384 EI}$
(1,5 đ)

Người ra đề.....PGS-TS Phan Đình Huân

Bộ môn Thiết kế máy.....TS Bùi Trọng Hiếu

Bài 1

1/ Các hàm nội suy của phần tử tam giác 3 nút có dạng:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\N_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\N_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]\end{aligned}\tag{1}$$

Thay tọa độ các nút và giá trị diện tích A của tam giác

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 9 \text{ đvdt}$$
 vào (1), ta được:

$$N_1(x, y) = -\frac{2}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{5}{3}$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{18}x + \frac{5}{18}y - \frac{2}{3}$$

2/ Ma trận [B]

Ta có:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{18} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} [L]^{-1}$$

3/Nội suy vật lý

a/ Dùng phần tử thực

Nhiệt độ tại điểm A(2, 5) được nội suy qua biểu thức:

$$\begin{aligned}t_A &= N_1(x, y) \cdot t_1 + N_2(x, y) \cdot t_2 + N_3(x, y) \cdot t_3 \\ &= \left(-\frac{2}{9} \cdot 2 - \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{5}{3}\right) 50 + \left(\frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 5\right) 52 + \left(\frac{1}{18} \cdot 2 + \frac{5}{18} \cdot 5 - \frac{2}{3}\right) 53 = 51,5^\circ C\end{aligned}$$

b/ Dùng phần tử tham chiếu

Trước tiên, ta xác định tọa độ điểm $A'(\xi_{A'}, \eta_{A'})$, ảnh của điểm A(2, 5) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_A = \bar{N}_1 x_1 + \bar{N}_2 x_2 + \bar{N}_3 x_3 = (1 - \xi - \eta) \cdot 2 + \xi \cdot 7 + \eta \cdot 5 = 5 \\ y_A = \bar{N}_1 y_1 + \bar{N}_2 y_2 + \bar{N}_3 y_3 = (1 - \xi - \eta) \cdot 2 + \xi \cdot 1 + \eta \cdot 5 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi_{A'} = \frac{1}{2}, \eta_{A'} = \frac{1}{6}$$

Nhiệt độ tại A' được nội suy qua biểu thức:

$$t_{A'=(1-\xi-\eta) \cdot t_1 + \xi \cdot t_2 + \eta \cdot t_3} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 52 + \frac{1}{6} \cdot 53 = 51,5^\circ C$$

Bài 2

Bảng Tô pô

Phần tử	Gốc		Ngọn		Chiều dài thanh	L	M
	X	Y	X	y			
1 (1-2)	$-L \sin \theta$	0	0	$-L \cos \theta$	L	$\sin \theta = \frac{1}{2}$	$-\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2 (2-3)	0	$-L \cos \theta$	$L \sin \theta$	0	L	$\sin \theta = \frac{1}{2}$	$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1/ Ma trận độ cứng phần tử

Ma trận độ cứng phần tử ①

$$[K_1] = \frac{AE_1}{L} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 m_1 & -l_1^2 & -l_1 m_1 \\ l_1 m_1 & m_1^2 & -l_1 m_1 & -m_1^2 \\ -l_1^2 & -l_1 m_1 & l_1^2 & l_1 m_1 \\ -l_1 m_1 & -m_1^2 & l_1 m_1 & m_1^2 \end{bmatrix}$$

với $l_1 = \sin \theta = \frac{1}{2}$; $m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = 100 \text{ mm}^2, L = 800 \text{ mm}, E_1 = 70.000 \text{ MPa}$

ta có ma trận độ cứng phần tử ① tương ứng các bậc tự do u_1, v_1, u_2, v_2 là

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 2187,50 & -3788,75 & -2187,50 & 3788,75 \\ -3788,75 & 6562,12 & 3788,75 & -6562,12 \\ -2187,50 & 3788,75 & 2187,50 & -3788,75 \\ 3788,75 & -6562,12 & -3788,75 & 6562,12 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

Ma trận độ cứng phần tử ②

$$[K_2] = \frac{AE_2}{L} \begin{bmatrix} l_2^2 & l_2 m_2 & -l_2^2 & -l_2 m_2 \\ l_2 m_2 & m_2^2 & -l_2 m_2 & -m_2^2 \\ -l_2^2 & -l_2 m_2 & l_2^2 & l_2 m_2 \\ -l_2 m_2 & -m_2^2 & l_2 m_2 & m_2^2 \end{bmatrix}$$

với $l_2 = \sin \theta = \frac{1}{2}$; $m_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = 100 \text{ mm}^2$, $L = 800 \text{ mm}$, $E_2 = 190.000 \text{ MPa}$

ta có ma trận độ cứng phần tử ② tương ứng các bậc tự do u_2, v_2, u_3, v_3 là

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 5937,50 & 10283,75 & -5937,50 & -10283,75 \\ 10283,75 & 17811,46 & -10283,75 & -17811,46 \\ -5937,50 & -10283,75 & 5937,50 & 10283,75 \\ -10283,75 & -17811,46 & 10283,75 & 17811,46 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

2/ Ma trận độ cứng kết cấu

Ma trận độ cứng kết cấu tương ứng với các bậc tự do $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ là

$$[K] = \begin{bmatrix} 2187,50 & -3788,75 & -2187,50 & 3788,75 & 0 & 0 \\ -3788,75 & 6562,12 & 3788,75 & -6562,12 & 0 & 0 \\ -2187,50 & 3788,75 & 8125 & 6495 & -5937,50 & -10283,75 \\ 3788,75 & -6562,12 & 6495 & 24373,57 & -10283,75 & -17811,46 \\ 0 & 0 & -5937,50 & -10283,75 & 5937,50 & 10283,75 \\ 0 & 0 & -10283,75 & -17811,46 & 10283,75 & 17811,46 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

3/ Chuyển vị nút

Đưa điều kiện biên $u_1=v_1 = u_3 = v_3=0$ vào hệ phương trình $[K]\{U\} = \{F\}$, ta được:

$$\begin{bmatrix} 8125 & 6495 \\ 6495 & 24373,57 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50000 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 2,08 \\ -2,61 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

4/ Ứng suất phần tử

Áp dụng định luật Hooke, ta có:

Ứng suất trung bình trong phần tử 1:

$$\sigma_1 = E_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \approx 288,68 \text{ MPa}$$

Ứng suất trung bình trong phần tử 2:

$$\sigma_2 = E_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \approx -288,68 \text{ MPa}$$

Bài 3

1/ - Ma trận độ cứng phần tử:

Ma trận độ cứng phần tử tương ứng với các bậc tự do $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ là

$$[K^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng kết cấu:

Kết cấu chỉ có một phần tử, do vậy ma trận độ cứng kết cấu cũng chính là ma trận độ cứng phần tử:

$$[K] = [K^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

2/Chuyển vị nút

Tải nút tương đương tương kết cấu ứng với các bậc tự do $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{pmatrix}$$

Đưa điều kiện biên $v_1 = v_2 = 0$ vào hệ phương trình $[K]\{U\} = \{F\}$, ta được:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL^2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{qL^3}{24EI} \\ \frac{qL^3}{24EI} \end{pmatrix} \quad (1)$$

3/Nội suy

Biểu thức nội suy chuyển vị thẳng

$$v(x) = v_1 N_1(x) + \theta_1 N_2(x) + v_2 N_3(x) + \theta_2 N_4(x) \quad (2)$$

$$\text{với } N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Thay $x = \frac{L}{2}$, $v_1 = v_2 = 0$, (1) vào (2), ta có được chuyển vị tại M:

$$v_M = -\frac{1}{96} \frac{qL^4}{EI} = -\frac{4}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad (3)$$

Ta nhận thấy kết quả (3) cho bởi phương pháp phần tử hữu hạn với **mô hình tính một phần tử** khác với (nhỏ hơn) kết quả chính xác (giải tích). Biện pháp để nâng cao độ chính xác kết quả tính là ta chia lưới sao cho M là một nút của hệ lưới, dùng **mô hình tính hai phần tử** chẳng hạn.