

- Cho đường spline bậc ba tự nhiên nội suy các điểm  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 1)$ ,  $P_3(3, 0)$ ,  $P_4(4, 2)$ . Xác định:
  - Tiếp tuyến đường cong tại các điểm trên
  - Các phương trình tham số từng đoạn đường cong.
  - Toạ độ điểm nằm trên phân đoạn thứ hai khi  $t = 0,5$ .
- Cho các điểm điều khiển  $V_0(1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $V_1(1, 0)$  và  $V_2(0, 0)$ .
  - Viết phương trình đường cong NURBS với các giá trị trọng số  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 1$  và  $w_2 = 2$  (hoặc  $w_0 = 2$ ,  $w_1 = 1$  và  $w_2 = 1$ ) với vectơ nút  $t = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ .
  - Tìm  $P(0,25)$ ,  $P(0,75)$
- Cho 2 điểm  $A(1, 0, 0)$   $B(1, 1, 3)$ . Yêu cầu:
  - Viết phương trình tham số đoạn thẳng qua 2 điểm A và B.
  - Phương trình tham số mặt cong tròn xoay được tạo ra bằng phép xoay đoạn thẳng AB quanh trục y và trục x.

## Đáp án

### Bài 1.

1. Đối với spline tự nhiên :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_2 - P_1) \\ 3(P_3 - P_1) \\ 3(P_4 - P_2) \\ 3(P_4 - P_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 0 \\ 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 0 \\ 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 26/15 \\ 5/3 & -7/15 \\ 5/3 & 2/15 \\ 2/3 & 44/15 \end{bmatrix}$$

2. Phương trình tham số trên các phân đoạn:

$$P_1(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2/3 & 26/15 \\ 5/3 & -7/15 \end{bmatrix}$$

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5/3 & -7/15 \\ 5/3 & 2/15 \end{bmatrix}$$

$$P_3(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 5/3 & 2/15 \\ 2/3 & 44/15 \end{bmatrix}$$

3. Toạ độ điểm trên phân đoạn 2 khi  $t = 0,5$ .

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} 0,5^3 & 0,5^2 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5/3 & -7/15 \\ 5/3 & 2/15 \end{bmatrix}$$

$$= [2 \quad 0,425]$$

## Bài 2.

1. Phương trình đường cong NURBS có dạng:

$$P(t) = \frac{N_{0,3}(t)w_0V_0 + N_{1,3}(t)w_1V_1 + N_{2,3}(t)w_2V_2}{N_{0,3}(t)w_0 + N_{1,3}(t)w_1 + N_{2,3}(t)w_2}$$

Ta thu được các hàm cơ sở  $N_{0,3}(t)$ ,  $N_{1,3}(t)$  và  $N_{2,3}(t)$  từ phương trình đệ quy **Cox - de Boor**:

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

và

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_i)} N_{i,k-1}(t) + \frac{(t_{i+k} - t)}{(t_{i+k} - t_{i+1})} N_{i+1,k-1}(t)$$

trong đó, véctor nút là  $[t_i, \dots, t_{i+k}]$ .

Suy ra:

$$N_{2,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } t_2 = 0 \leq t \leq t_3 = 1 \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{(t_3 - t)}{(t_3 - t_2)} N_{2,1}(t) = 1 - t$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_3 - t_2)} N_{2,1}(t) = t$$

$$N_{0,3}(t) = \frac{(t_3 - t)}{(t_3 - t_1)} N_{1,2}(t) = (1 - t)^2$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{(t - t_1)}{(t_3 - t_1)} N_{1,2}(t) + \frac{(t_4 - t)}{(t_4 - t_2)} N_{2,2}(t) = 2t(1 - t)$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_4 - t_2)} N_{2,2}(t) = t^2$$

Suy ra:

$$P(t) = \frac{w_0 V_0 (1 - t)^2 + w_1 V_1 2t(1 - t) + w_2 V_2 t^2}{w_0 (1 - t)^2 + w_1 2t(1 - t) + w_2 t^2}$$

$$P(t) = \frac{1(1 - t)^2(1/2, \sqrt{3}/2) + 1.2t(1 - t)(1, 0) + 2.t^2(0, 0)}{1(1 - t)^2 + 1.2t(1 - t) + 2.t^2}$$

Rút gọn ta có:

$$P(t) = \left[ \frac{1 + 2t - 3t^2}{2(1 + t^2)}, \frac{\sqrt{3}(1 - t)^2}{2(1 + t^2)} \right]$$

2. Toạ độ tại các điểm  $t = 0,25$  và  $t = 0,75$ :

$$P(0,25) = \left[ \frac{1 + 2.0,25 - 3.0,25^2}{2(1 + 0,25^2)}, \frac{\sqrt{3}(1 - 0,25)^2}{2(1 + 0,25^2)} \right]$$

$$P(0,25) = \left[ \frac{21}{34}, \frac{9\sqrt{3}}{34} \right]$$

$$P(0,25) = [0,618, 0,458]$$

Tương tự:

$$P(0,75) = \left[ \frac{1 + 2.0,75 - 3.0,75^2}{2(1 + 0,75^2)}, \frac{\sqrt{3}(1 - 0,75)^2}{2(1 + 0,75^2)} \right]$$

$$P(0,75) = \left[ \frac{13}{50}, \frac{\sqrt{3}}{50} \right]$$

$$P(0,25) = [0,26, 0,035]$$

### Bài 3.

1. Đoạn thẳng AB với A(1, 0, 0) B(1, 1, 3) có thể biểu diễn ở dạng tham số  $L(t) = (x(t), y(t), z(t)) = A + (B - A)t$ . Từ đây, mỗi thành phần của đoạn thẳng được viết lại như sau:

$$x(t) = 1 + (1 - 1)t = 1$$

$$y(t) = 0 + (1 - 0)t = t$$

$$z(t) = 0 + (3 - 0)t = 3t$$

2. Phương trình tham số mặt trụ quay quanh trục y:

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 3t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình tham số mặt trụ quay quanh trục x:

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 3t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$