Đáp Án Môn Mô Hình Hóa Hình Học
Học kỳ 2 năm 2010-2011

<u>Câu 1:</u>

a) Viết phương trình đường cong NURBS cho ¼ cung elip:

Cấp đường cong k=3;

Số điểm điều khiển: V_o=(1, 2) V_1=(4, 2) và V_2(4, 1) cho nên n=2

Véctơ nút t= [0 0 0 1 1 1]

Các hàm cơ sở:

$$N_{0,3}(t) = (1-t)^2 \qquad \text{với } 0 \le t \le 1$$

$$N_{1,3}(t) = 2t(1-t) \qquad \text{với } 0 \le t \le 1$$

$$N_{2,3}(t) = t^2 \qquad \text{với } 0 \le t \le 1$$

- Nếu cho trước w_o=w_1=1, w_2=2 thì phương trình đường cong NURBS có dạng:

$$P\left(x(t), y(t)\right) = \frac{(1-t)^2.1.(4,1) + 2t(1-t).1.(4,2) + t^2.2.(1,2)}{(1-t)^2.1 + 2t(1-t).1 + t^2.2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{4.(1-t)^2 + 8t(1-t) + 2t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2} \\ y(t) = \dfrac{(1-t)^2 + 4t(1-t) + 4t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2} \end{cases}$$

Bởi vì

$$\frac{x(t)-1}{3} = \frac{\dfrac{4.(1-t)^2 + 8t(1-t) + 2t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2} - 1}{3} = \frac{3(1-t)^2 + 6t(1-t)}{3(1+t^2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y(t) - 1 = \frac{(1-t)^2 + 4t(1-t) + 4t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2} - 1 = \frac{2t(1-t) + 2t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

và

$$\Rightarrow \left[\frac{x(t)-1}{3}\right]^2 + \left[\frac{y(t)-1}{1}\right]^2 = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]^2 + \left[\frac{2t}{1+t^2}\right]^2 = \frac{\left[1-t^2\right]^2 + 4t^2}{\left[1+t^2\right]^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{\left[1+t^2\right]^2} = 1$$

Cho nên đường cong P(t) là cung elip và có tâm tại điểm (1, 1) bán kính lớn là 3, bán kính nhỏ là 1.

b) Các trọng số khác để biểu diễn cung elip là

- $w_0=1$, $w_1=1$ và $w_2=2$
- $w_0=2$, $w_1=1$ và $w_2=1$
- $w_0=1$, $w_1=\sqrt{2}/2$ và $w_2=1$
- $w_0=1/2$, $w_1=\sqrt{2}/4$ và $w_2=1/2$

Bài 2:

a. Phương trình đường cong Bezier bậc 3 có dạng sau:

$$P(t)=\begin{bmatrix}(1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_0\\V_1\\V_2\\V_3\end{bmatrix}$$

Hay biểu diễn dạng ma trận:

$$P(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\3 & -6 & 3 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_0\\V_1\\V_2\\V_3\end{bmatrix}$$

Thế tọa độ các điểm điều khiển $V_0(1,0,3)$,$V_1(3,0,5)$, $V_2(4,0,4)$ và $V_3(6,0,7)$ vào ta có:

$$P(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\3 & -6 & 3 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\3 & 0 & 5 & 1\\4 & 0 & 4 & 1\\6 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 7 & 0\\-3 & 0 & -9 & 0\\6 & 0 & 6 & 0\\1 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Quay đường cong quay trục x ta có phương trình mặt cong như sau:

$$P(t,\theta) = P(t).\left[T(\phi)\right]_{Rx}$$

$$P(t,\theta) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P(t,\theta) = \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 6t + 1 & (-7t^3 + 9t^2 - 6t - 3)\sin(\theta) & (7t^3 - 9t^2 + 6t + 3)\cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}$$

b. Thay thế giá trị t=1/4 và θ=120^0 vào phương trình trên ta có:

$$P(\frac{1}{4}, 120^0)$$

$$= \begin{bmatrix} 2(\frac{1}{4})^3 - 3(\frac{1}{4})^2 + 6(\frac{1}{4}) + 1 & (-7(\frac{1}{4})^3 + 9(\frac{1}{4})^2 - 6(\frac{1}{4}) - 3)\sin(120^0) & (7(\frac{1}{4})^3 - 9(\frac{1}{4})^2 + 6(\frac{1}{4}) + 3)\cos(120^0) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2,343 & -3,504 & -2,023 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy tọa độ điểm trên mặt cong tại t=1/4 và θ=120^0 là (2,343   -3,504   -2,023)

Bài 3:

a) - Đoạn thẳng AB có thể biểu diễn ở dạng sau:

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 4t \\ y(t) = 2 - 4t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

- Phương trình đường dẫn có thể biểu diễn ở dạng sau

$$\begin{cases} x(s) = bs \\ y(s) = 0 \\ z(s) = bs \end{cases} \qquad (*)\,(0 < s < 1)$$

- Ma trận quét hình : $\left[T(s)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ bs & 0 & bs & 1 \end{bmatrix}$

Phương trình biểu diễn mặt cong quét hình được biểu diễn ở dạng tham sô sau:

$$P(t,s) = Q(t).\left[T(s)\right] = \begin{bmatrix} 2-4t & 2-4t & 0 & 1 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ bs & 0 & bs & 1 \end{bmatrix}$$

- Tìm tọa độ A,B sau phép biến hình tại b=3 (tương ứng mặt phẳng z = 3)

Khi t = 0, s =1 thì $A^* = (5 \quad 2 \quad 3)$

Khi t =1, s = 1 thì $B^* = (1 \quad -2 \quad 3)$

b) Ma trận quét hình được xác định theo trình tự sau:

1. Quay sao cho đường dẫn z = x trùng với trục z (quanh trục y một góc -45^0)
2. Quét hình
3. Biến đổi tỷ lệ
4. Quay về vị trí cũ.

Suy ra ma trận quét hình:

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & bs\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ bs & 0 & bs & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình mặt cong:

$$[P(t,s)]^* = [2-4t \quad 2-4t \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ bs & 0 & bs & 1 \end{bmatrix}$$

Giả sử b = 4 ta có :

$$[P(s,t)]^* = [3(1-2t)+4s \quad 2(2-4t) \quad (2t-1)+4s \quad 1]$$

Suy ra 2 điểm A và B trong mặt phẳng z = 4 sẽ nằm trên đoạn thẳng đi qua 2 điểm (8, 4, 4) và (0, -4, 4)

- Trường hợp y = a

Trong ma trận quét hình ta thêm ma trận tịnh tiến cho mặt y = a trùng mặt y=0 và sau đó thực hiện tương tự các bước trên và tịnh tiến về vị trí cũ.