ĐHQG TP Hồ Chí Minh **Đề thi MÔ HÌNH HÓA HÌNH HỌC**
Trường ĐH BÁCH KHOA **Ngày thi: 07/01/2012**
Khoa Cơ Khí **Thời gian: 60 phút**
Bộ môn THIẾT Kế MÁY **Được sử dụng tài liệu.**

1. Cho đường spline bậc ba tự nhiên nội suy các điểm $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(3, 0)$, $P_4(4, 2)$. Xác định:
   a. Tiếp tuyến đường cong tại các điểm trên
   b. Các phương trình tham số từng đoạn đường cong.
   c. Toạ độ điểm nằm trên phân đoạn thứ hai khi t = 0,5.

2. Cho các điểm điều khiển $V_0(1/2, \sqrt{3}/2)$, $V_1(1, 0)$ và $V_2(0, 0)$.
   a. Viết phương trình đường cong NURBS với các giá trị trọng số $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ và $w_2 = 2$ (hoặc $w_0 = 2$, $w_1 = 1$ và $w_2 = 1$) với véctơ nút t = [0 0 0 1 1 1].
   b. Tìm P(0,25), P(0,75)

3. Cho 2 điểm A(1, 0, 0) B(1, 1, 3). Yêu cầu:
   a. Viết phương trình tham số đoạn thẳng qua 2 điểm A và B.
   b. Phương trình tham số mặt cong tròn xoay được tạo ra bằng phép xoay đoạn thẳng AB quanh trục y và trục x.

Đáp án

Bài 1.

1. Dối với spline tự nhiên :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_2 - P_1) \\ 3(P_3 - P_1) \\ 3(P_4 - P_2) \\ 3(P_4 - P_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 0 \\ 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 0 \\ 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 26/15 \\ 5/3 & -7/15 \\ 5/3 & 2/15 \\ 2/3 & 44/15 \end{bmatrix}$$

2. Phương trình tham số trên các phân đoạn:

$$P_1(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2/3 & 26/15 \\ 5/3 & -7/15 \end{bmatrix}$$

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5/3 & -7/15 \\ 5/3 & 2/15 \end{bmatrix}$$

$$P_3(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 5/3 & 2/15 \\ 2/3 & 44/15 \end{bmatrix}$$

3. Toạ độ điểm trên phân đoạn 2 khi t = 0,5.

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} 0{,}5^3 & 0{,}5^2 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5/3 & -7/15 \\ 5/3 & 2/15 \end{bmatrix}$$

= [2   17/40]

= [2   0,425]

Bài 2.

1. Phương trình đường cong NURBS có dạng:

$$P(t) = \frac{N_{0,3}(t)w_0V_0 + N_{1,3}(t)w_1V_1 + N_{2,3}(t)w_2V_2}{N_{0,3}(t)w_0 + N_{1,3}(t)w_1 + N_{2,3}(t)w_2}$$

Ta thu được các hàm cơ sở $N_{0,3}(t)$, $N_{1,3}(t)$ và $N_{2,3}(t)$ từ phương trình đệ quy **Cox - de Boor**:

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

và $$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_i)} N_{i,k-1}(t) + \frac{(t_{i+k} - t)}{(t_{i+k} - t_{i+1})} N_{i+k,k-1}(t)_{\ i+1,k-1}(t)$$

trong đó, véctơ nút là $[t_i,..., t_{i+k}]$.

Suy ra:

$$N_{2,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{với} \ t_2 = 0 \le t \le t_3 = 1 \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{(t_3 - t)}{(t_3 - t_2)} N_{2,1}(t) = 1 - t$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_3 - t_2)} N_{2,1}(t) = t$$

$$N_{0,3}(t) = \frac{(t_3 - t)}{(t_3 - t_1)} N_{1,2}(t) = (1 - t)^2$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{(t - t_1)}{(t_3 - t_1)} N_{1,2}(t) + \frac{(t_4 - t)}{(t_4 - t_2)} N_{2,2}(t) = 2t(1 - t)$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_4 - t_2)} N_{2,2}(t) = t^2$$

Suy ra:

$$P(t) = \frac{w_0 V_0 (1-t)^2 + w_1 V_1 2t(1-t) + w_2 V_2 t^2}{w_0 (1-t)^2 + w_1 2t(1-t) + w_2 t^2}$$

$$P(t) = \frac{1(1-t)^2 (1/2, \sqrt{3}/2) + 1.2t(1-t)(1, 0) + 2.t^2 (0, 0)}{1(1-t)^2 + 1.2t(1-t) + 2.t^2}$$

Rút gọn ta có:

$$P(t) = \left[\frac{1 + 2t - 3t^2}{2(1+t^2)}, \frac{\sqrt{3}(1-t)^2}{2(1+t^2)} \right]$$

2. Toạ độ tại các điểm t = 0,25 và t = 0,75:

$$P(0,25) = \left[\frac{1 + 2.0,25 - 3.0,25^2}{2(1+0,25^2)}, \frac{\sqrt{3}(1-0,25)^2}{2(1+0,25^2)} \right]$$

$$P(0,25) = \left[\frac{21}{34}, \quad \frac{9\sqrt{3}}{34} \right]$$

P(0,25)=[0,618, 0,458]

Tương tự:

$$P(0,75)=\left[\frac{1+2.0,75-3.0,75^2}{2(1+0,75^2)},\frac{\sqrt{3}(1-0,75)^2}{2(1+0,75^2)}\right]$$

$$P(0,75)=\left[\frac{13}{50},\quad \frac{\sqrt{3}}{50}\right]$$

P(0,25)=[0,26, 0,035]

Bài 3.

1. Đoạn thẳng AB với A(1, 0, 0) B(1, 1, 3) có thể biểu diễn ở dạng tham số L(t) = (x(t), y(t), z(t)) = A + (B – A)t. Từ đây, mỗi thành phần của đoạn thẳng được viết lại như sau:

x(t) = 1 + (1– 1)t = 1

y(t) = 0 + (1– 0)t = t

z(t) = 0 + (3– 0)t = 3t

2. Phương trình tham số mặt tròn xoay quay quanh trục y:

$$P(t)=\begin{bmatrix}1 & t & 3t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Phương trình tham số mặt mặt tròn xoay quay quanh trục x:

$$P(t)=\begin{bmatrix}1 & t & 3t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 1 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$