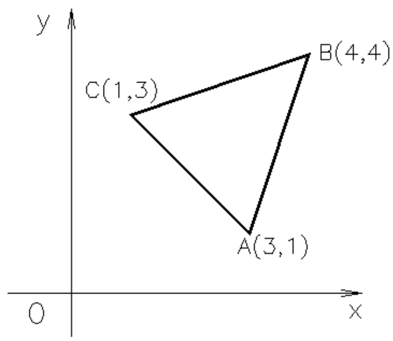
ĐHQG TP Hồ Chí Minh **Đề thi MÔ HÌNH HÓA HÌNH HỌC**
Trường ĐH BÁCH KHOA **Ngày thi**
Khoa Cơ Khí **Thời gian: 45 phút**
Bộ môn THIếT Kế MÁY **Được sử dụng tài liệu.**

Đề thi

Bài 1. Cho tam giác ABC với toạ độ các đỉnh A(3, 1), B(4, 4), C(1, 3). Tìm tọa độ các đỉnh hình tam giác sau phép quay hình chung quanh điểm A một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 1

Bài 2. Cho các điểm điều khiển $V_0(1, 2)$, $V_1(0, 1)$ và $V_2(1, 0)$

1. Viết phương trình đường cong Bezier xấp xỉ các điểm trên.
2. Viết phương trình đường cong Bezier hữu tỉ với các trọng số $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ và $w_2 = 2$. Chứng minh rằng đường cong này là cung tròn. Tìm P(0,25).

Đáp án

Bài 1.

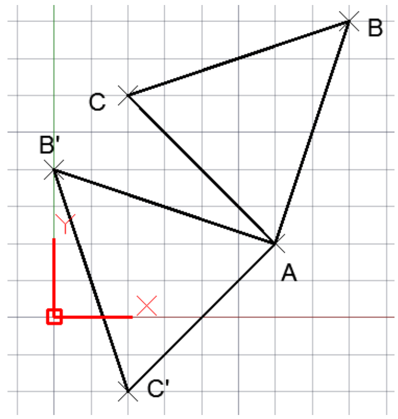
Quay quanh điểm A:

Thực hiện theo trình tự các phép biến hình sau:

1. Tịnh tiến A đến gốc tọa độ, do đó tự động tịnh tiến hình tam giác đến vị trí mới.

2. Quay chung quanh gốc tọa độ một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hồ (CCW).

3. Tịnh tiến A về vị trí ban đầu.



Ma trận biến hình:

$$[T]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$$

Tọa độ các đỉnh tam giác sau phép biến hình:

$$[P]^*=[P][T]=\begin{bmatrix}3&1&1\\4&4&1\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$$

$$[P]^*=\begin{bmatrix}3&1&1\\0&2&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

Bài 2:

1- Phương trình đường cong Bezier hữu tỉ

$$P(t)=\frac{P^w(t)}{w(t)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)w_iV_i}{\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)w_i}$$

với

$$B_{0,1}=\frac{2!}{0!\,2!}t^0(1-t)^2=(1-t)^2$$

$$B_{1,2}=\frac{2!}{1!\,1!}t^1(1-t)^1=2t(1-t)$$

$$B_{2,2}=\frac{2!}{2!\,0!}t^2(1-t)^0=t^2$$

Suy ra:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)w_iV_i = (1-t)^2\ w_0V_0 + 2t(1-t)w_1V_0 + t^2w_2V_2$$

$$= (1\text{-}t)^2.1.(1,\ 2) + 2t(1\text{-}t).1.(0,\ 1) + t^2.2.(1,0)$$
$$= (1\text{-}2t+t^2+2t^2,\ 2\text{-}4t+2t^2+2t\text{-}2t^2)= (1\text{-}2t+3t^2,\ 2\text{-}2t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)w_i = (1-t)^2\ w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2w_2$$

$$= (1\text{-}t)^2.1 + 2t(1\text{-}t).1 + t^2.2$$
$$= 1\text{-}2t+t^2+2t\text{-}2t^2 + 2t^2$$
$$= 1+t^2$$

Từ đây suy ra:

$$P(t) = \left(\frac{1-2t+3t^2}{1+t^2}, \frac{2-2t}{1+t^2}\right)$$

Bởi vì

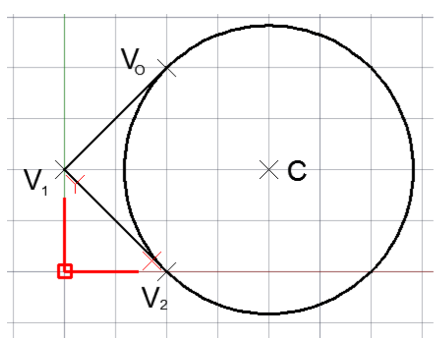
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(3t^2-2t+1-2-2t^2)^2 + (2-2t-1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{(t^2-2t-1)^2 + (1-2t-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{t^4+4t^2+1-4t^3-2t^2+4t+1+4t^2+t^4-4t-2t^2+4t^3}{(1+t^2)^2},$$

$$= \frac{2t^4+4t^2+2}{(1+t^2)^2} = 2$$

cho nên P(t) chính là phương trình tham số của 1/4 đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ đơn vị.



Từ phương trình tham số trên ta suy ra:

$$P(0{,}25) = \left(\frac{1-2.0{,}25+3.0{,}25^2}{1+0{,}25^2}, \frac{2-2.0{,}25}{1+0{,}25^2}\right)$$
$$= (0{,}647,\quad 1{,}412))$$