

ĐÁP ÁN

MÔ HÌNH HOÁ HÌNH HỌC

Bài 1.

Phép biến đổi tỉ lệ theo điểm A:

- Đầu tiên dời điểm A về gốc tọa độ, thực hiện phép biến đổi tỉ lệ, sau đó dời về vị trí cũ. Ma trận biến hình có dạng:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tọa độ các điểm tam giác sau phép biến hình:

$$[P]^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 2:

1. Quay trục AB quanh trục x với góc quay α cho đến khi nó nằm trên mặt phẳng xz. Xác định góc α :

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

và $l = \sqrt{3}$

Ma trận quay: $[T]_{Rx}^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Quay A'B' quanh trục y góc ϕ cho đến khi trùng với trục z:

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

và

$$[T]_{Ry}^{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Ma trận quay quanh trục z góc 45° :

$$[T]_{Rz}^{45^{\circ}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Cuối cùng, ma trận quay quanh trục bất kỳ có dạng:

$$[T]_{RAB}^{45} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,865 & 0,509 & -0,031 & 0 \\ 0,311 & 0,081 & 0,051 & 0 \\ 0,051 & -0,031 & 0,8057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân ma trận tọa độ điểm của tứ diện ban đầu cho ma trận quay $[T]_{RAB}$ ta thu được ma trận tọa độ điểm sau phép biến hình:

$$[P^*] = [P][T]_{RAB}$$

$$[P^*] = [1 \ -1 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 0,865 & 0,509 & -0,031 & 0 \\ 0,311 & 0,081 & 0,051 & 0 \\ 0,051 & -0,031 & 0,8057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,60951 \ 0,01176 \ -1,6212 \ 1]$$