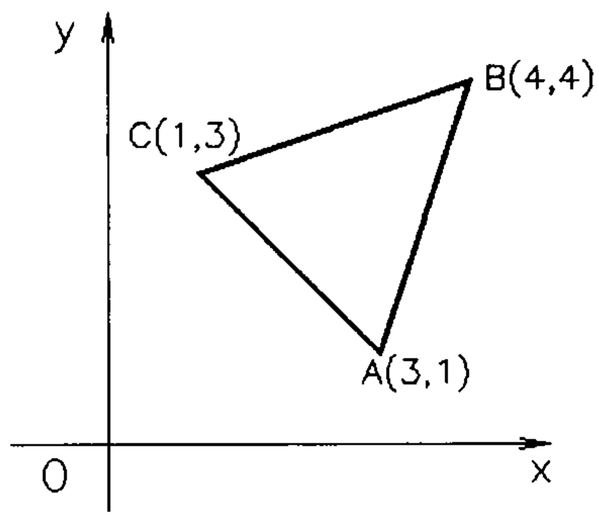
ĐHQG TP Hồ Chí Minh **Đề kiểm tra MÔ HÌNH HÓA HÌNH HỌC**
Trường ĐH BÁCH KHOA **Ngày thi: 13/10/2012**
Khoa Cơ Khí **Thời gian: 45 phút**
Bộ môn THIẾT Kế MÁY **Được sử dụng tài liệu.**

Bài 1. Cho tam giác ABC với toạ độ các đỉnh A(3, 1), B(4, 4), C(1, 3). Tìm tọa độ điểm C sau phép quay hình chung quanh trục AB một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hô.



Hình 1

Bài 2. Cho bốn véc tơ điểm hai chiều $P_0[-1, 2]$, $P_1[0, 0]$, $P_2[1, 2]$ và $P_3[2, 9]$. Hãy xác định véc tơ tiếp tuyến đường cong tại các điểm P_0, P_1, P_2 và P_3 cần thiết để nội suy đường cong spline bậc ba tự nhiên.

Giảng viên ra đề PGS.TS Nguyễn Hữu Lôc

CNBM PGS.TS Phạm Huy Hoàng

Đáp án

Bài 1

a/ Thứ tự
1/ Đưa điểm A trùng với O

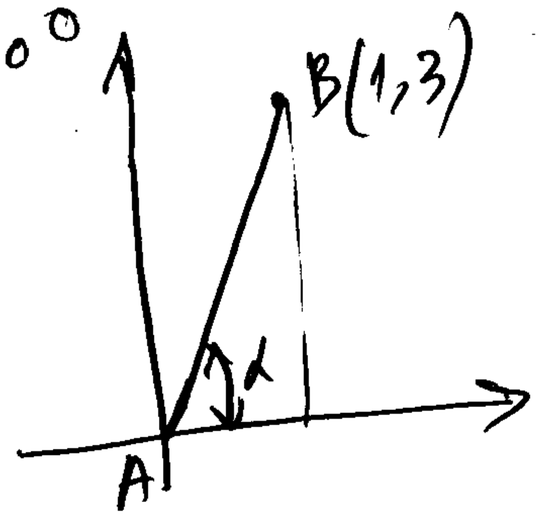
2/ Quay dọc quanh trục z 1 góc α

3/ Quay dọc quanh trục x 1 góc 90^0

4/ Quay dọc quay trục z 1 góc α

5/ Tịnh tiến từ O về A.

Cái ma trận lần lượt là



* $[T]_{A\to O} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -3&-1&0&1 \end{bmatrix}$

2/ $[T]^{-\alpha}_{Rz} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ với $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$[T]^{-\alpha}_{Rz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

3/ Quay dọc quanh x:

$[T]^{90^\circ}_{Rx} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&\cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0\\ 0&-\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

4/ Quay quay trục z 1 góc α

$[T]^{\alpha}_{Rz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

5/ Tịnh tiến về vị trí cũ

$[T]_{O\to A} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 3&1&0&1 \end{bmatrix}$

Ma trận biến đổi tổng quát:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ -3&-1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 3&1&0&1 \end{bmatrix}$$

Tọa độ điểm C sau phép biến hình

$$[P]_C^* = [P]_C [T] \quad \text{với} \quad [T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{8}{\sqrt{10}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_C^* = [1 \quad 3 \quad 0 \quad 1][T]$$

$$= [3{,}4 \quad 2{,}2 \quad 2{,}53 \quad 1]$$

Tọa độ điểm C là $(3{,}4;\ 2{,}2;\ 2{,}53)$

Bài 2

Tiếp tuyến tại các điểm được xác định theo ma trận:

$$\begin{bmatrix} 2&1&0&0 \\ 1&4&1&0 \\ 0&1&4&1 \\ 0&0&1&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_1-P_0) \\ 3(P_2-P_0) \\ 3(P_3-P_1) \\ 3(P_3-P_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3&-6 \\ 6&0 \\ 6&27 \\ 3&21 \end{bmatrix}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&1&0&0 \\ 1&4&1&0 \\ 0&1&4&1 \\ 0&0&1&2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3&-6 \\ 6&0 \\ 6&27 \\ 3&21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 26&-7&2&-1 \\ -7&14&-4&2 \\ 2&-4&14&-7 \\ -1&2&-7&26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3&-6 \\ 6&0 \\ 6&27 \\ 3&21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 26 & -7 & 2 & -1 \\ -7 & 14 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 14 & -7 \\ -1 & 2 & -7 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 15 & -41 \\ 15 & -8 \\ 15 & 73 \\ 15 & 121 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{41}{15} \\ 1 & -\frac{8}{15} \\ 1 & \frac{73}{15} \\ 1 & \frac{121}{15} \end{bmatrix}$$

Vậy các điểm đó là: $P_0'\left(1, -\frac{41}{15}\right)$

$P_1'\left(1, -\frac{8}{15}\right)$

$P_2'\left(1, \frac{73}{15}\right)$

$P_3'\left(1, \frac{121}{15}\right)$