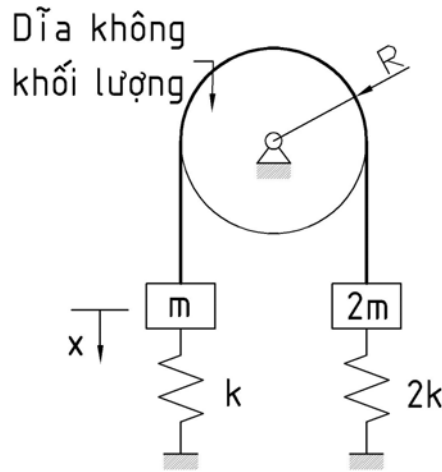


Câu 1: 5 điểm

Cho cơ hệ 1 bậc tự do (như *hình 1*) gồm 2 vật nối với nhau bằng 1 dây không dẫn và không khối lượng, dây uốn quanh 1 đĩa tròn không khối lượng. Chọn tọa độ suy rộng là x . Với $m = 2 \text{ kg}$ là khối lượng, $k = 5000 \text{ N/m}$ là độ cứng lò xo.

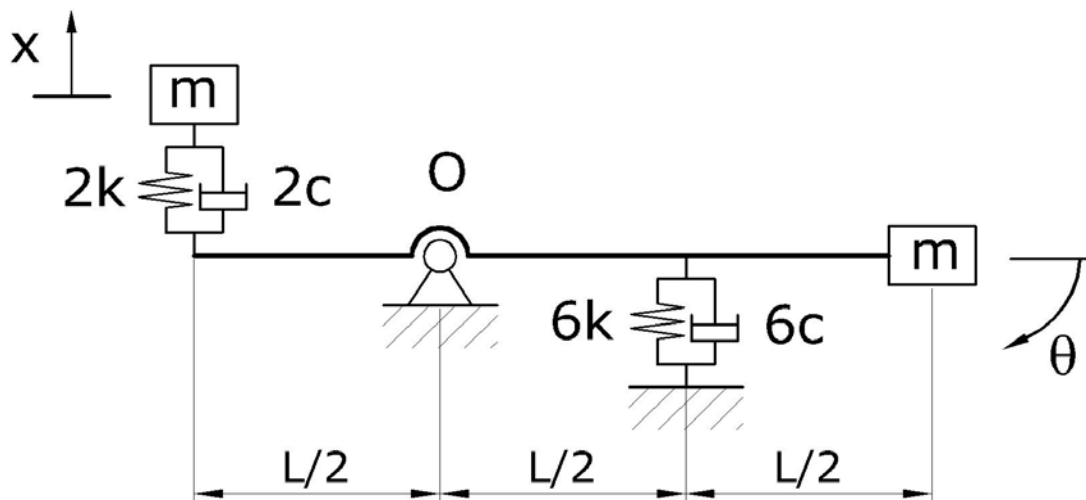


Hình 1

- a/ Thiết lập phương trình vi phân mô tả cơ hệ bằng phương pháp năng lượng (phương pháp Lagrange) (3 đ)
- b/ Xác định tần số riêng của cơ hệ $\omega_n(\text{rad/s})$. (1 đ)
- c/ Xác định biên độ $A(\text{m})$ và góc lệch pha $\phi(\text{rad})$ của dao động, biết tại thời điểm $t = 0$ thì $x(0) = 0.01 \text{ m}$ và $\dot{x}(0) = 0$ (1 đ)

Câu 2: 5 điểm

Cho cơ hệ 2 bậc tự do (như *hình 2*) gồm một thanh chiều dài $3L/2$, không khối lượng, quay quanh khớp trụ O. Thanh mang vật (xem như chất điểm) có khối lượng m đặt ở đầu bên phải của thanh. Giữa phần bên phải có lắp lò xo có độ cứng $6k$ và giảm chấn có hằng số cản nhớt (hệ số giảm chấn) $6c$. Đầu bên trái lắp lò xo có độ cứng $2k$, giảm chấn có hằng số cản nhớt $2c$, và vật có khối lượng m . Chọn tọa độ suy rộng là x và θ . Biết hệ có giảm chấn yếu với $c = \sqrt{k.m}$.

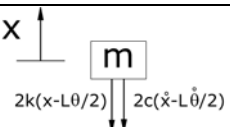
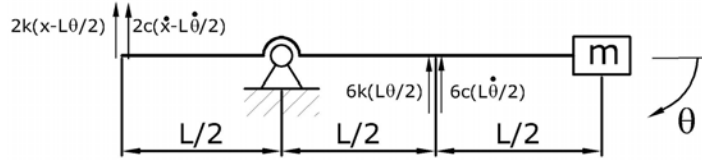


Hình 2

- a/ Thiết lập phương trình vi phân (dạng ma trận) mô tả cơ hệ bằng phương pháp lực (phương pháp Newton) (2.5 đ)
- b/ Xác định các tần số riêng của cơ hệ khi hằng số cản nhớt $c=0$. (1.75 đ)
- c/ Xác định các vectơ dạng riêng của cơ hệ khi hằng số cản nhớt $c=0$. (0.75 đ)

GV ra đề: TS Phan Tấn Tùng

CNBM: TS Bùi Trọng Hiếu

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Do dây không dẫn nên hai khối lượng có chuyển vị bằng nhau. Động năng $K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{2m\dot{x}^2}{2} = \frac{3m\dot{x}^2}{2}$	0.5 đ
	Thế năng $V = \sum \frac{k_i x_i^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{2kx^2}{2} = \frac{3kx^2}{2}$	0.5 đ
	Hàm Lagrange $L = K - V = \frac{3m\dot{x}^2}{2} - \frac{3kx^2}{2} \Rightarrow$ Các đạo hàm $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 3m\ddot{x}$	0.5 đ
	$\frac{\partial L}{\partial x} = -3kx$	0.5 đ
	PTVP mô tả cơ hệ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3m\ddot{x} + 3kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$ Với $m=2\text{kg}$ và $k=5000\text{N/m} \Rightarrow 2\ddot{x} + 5000x = 0$ hay $\ddot{x} + 2500x = 0$	1 đ
1b	Tần số riêng của cơ hệ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{1}} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	1 đ
1c	Biên độ dao động $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2} = \sqrt{0.01^2 + \left(\frac{0}{50} \right)^2} = 0.01\text{m}$	0.5 đ
	Góc lệch pha ϕ Nếu chọn $x(t) = A \cos(\omega_n t + \phi) \Rightarrow \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0} \right) = \tan^{-1}(0) \Rightarrow \phi = 0 \text{ rad}$	0.5 đ
	Nếu chọn $x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \Rightarrow \phi = \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{\omega_n \dot{x}_0} \right) = \tan^{-1}(\infty) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	
2a	 Xét cân bằng lực trên vật bên trái $-2k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right) - 2c\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\right) = m\ddot{x}$	0.5 đ
	PTVP thứ 1 $\Rightarrow m\ddot{x} + 2c\dot{x} - cL\dot{\theta} + 2kx - kL\theta = 0$	0.5 đ
	 Xét cân bằng mômen quanh khớp bản lề $2k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right) \cdot \frac{L}{2} + 2c\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\right) \cdot \frac{L}{2} - 6k\left(\frac{L}{2}\right)^2 \theta - 6c\left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\theta} = mL^2\ddot{\theta}$	0.5 đ

	PTVP thứ 2 $\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} - cL\dot{x} + 2cL^2\dot{\theta} - kLx + 2kL^2\theta = 0$	0.5 đ
	Vậy hệ PTVP mô tả cơ hệ dạng ma trận $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -cL \\ -cL & 2cL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -kL \\ -kL & 2kL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0$	0.5 đ
2b	Do c=0 nên hệ PTVP trở thành $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -kL \\ -kL & 2kL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$	0.25đ
	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -kL \\ -kL & 2kL^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k/m - \lambda & -kL/m \\ -k/mL & 2k/m - \lambda \end{bmatrix}$	0.25đ
	Điều kiện để PT có nghiệm không tầm thường $\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = (2k/m - \lambda)^2 - (k/m)^2 = 0$	0.25đ
	Ta có $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = 0$	-
	1/ $(2k/m - \lambda) - (k/m) = -\lambda + k/m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{k}{m}$	0.25đ
	Vì $\lambda_1 = \omega_1^2 \Rightarrow$ Tần số riêng thứ 1 là $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ rad/s	0.25đ
	2/ $(2k/m - \lambda) + (k/m) = -\lambda + 3k/m = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 3\frac{k}{m}$	0.25đ
	Vì $\lambda_2 = \omega_2^2 \Rightarrow$ Tần số riêng thứ 2 là $\omega_2 = 1.732\sqrt{\frac{k}{m}}$ rad/s	0.25đ
2c	Ta có $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{Q} = 0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -kL \\ -kL & 2kL^2 - \omega^2 mL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{2k - \omega^2 m}{kL}$	0.25 đ
	1/ với $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow Q_2 = \frac{2k - \frac{k}{m}m}{kL} = \frac{1}{L} \Rightarrow$ Véc tơ dạng riêng thứ 1: $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/L \end{bmatrix}$	0.25 đ
	2/Với $\omega_2^2 = \frac{3k}{m} \Rightarrow Q_2 = \frac{2k - \frac{3k}{m}m}{kL} = -\frac{1}{L} \Rightarrow$ Véc tơ dg riêng thứ 2: $\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/L \end{bmatrix}$	0.25đ

Hết đáp án

TS Phan Tấn Tùng