Cấu trúc người máy lập trình được

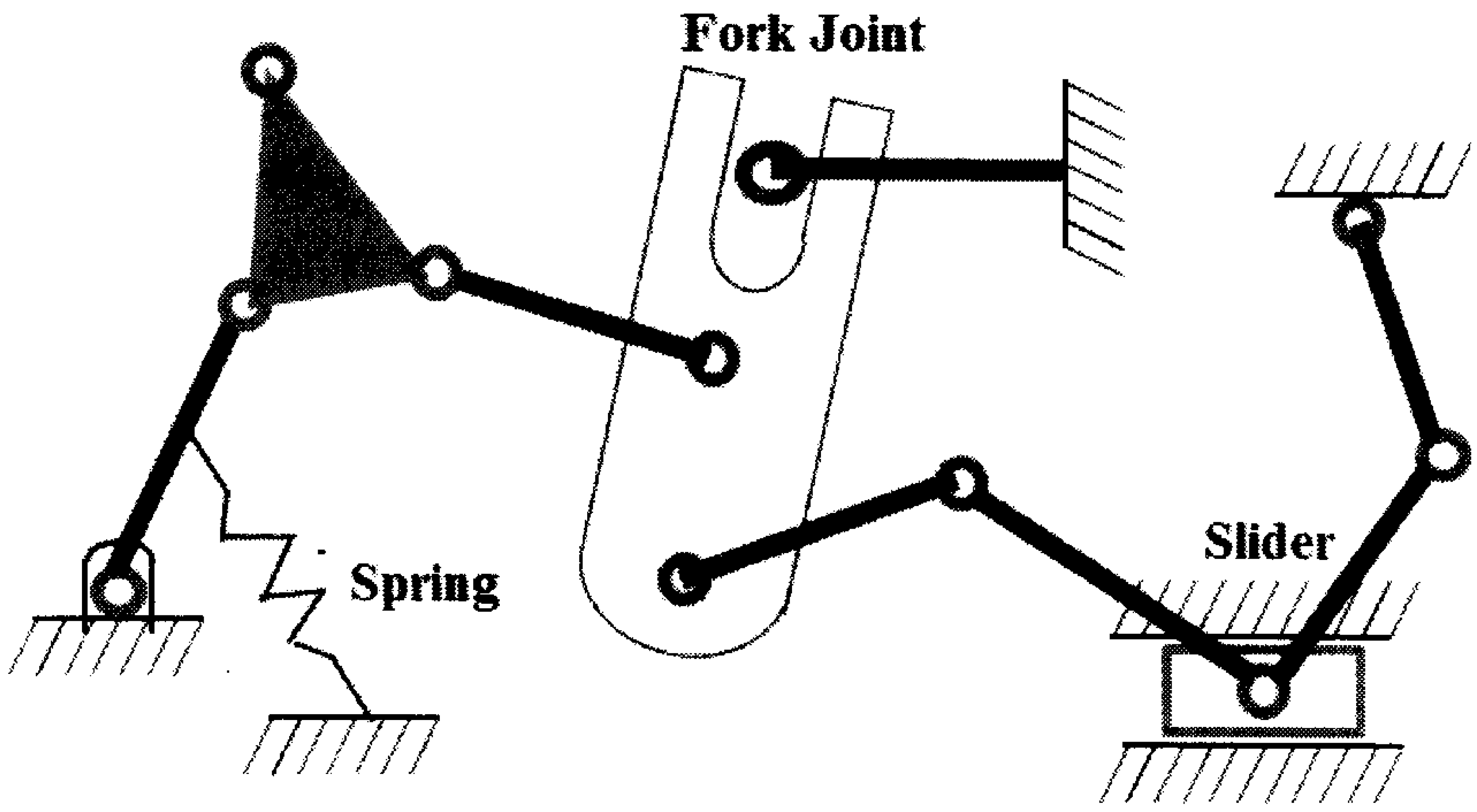
Final Exam

Lecture: Structure of Programmable Robots

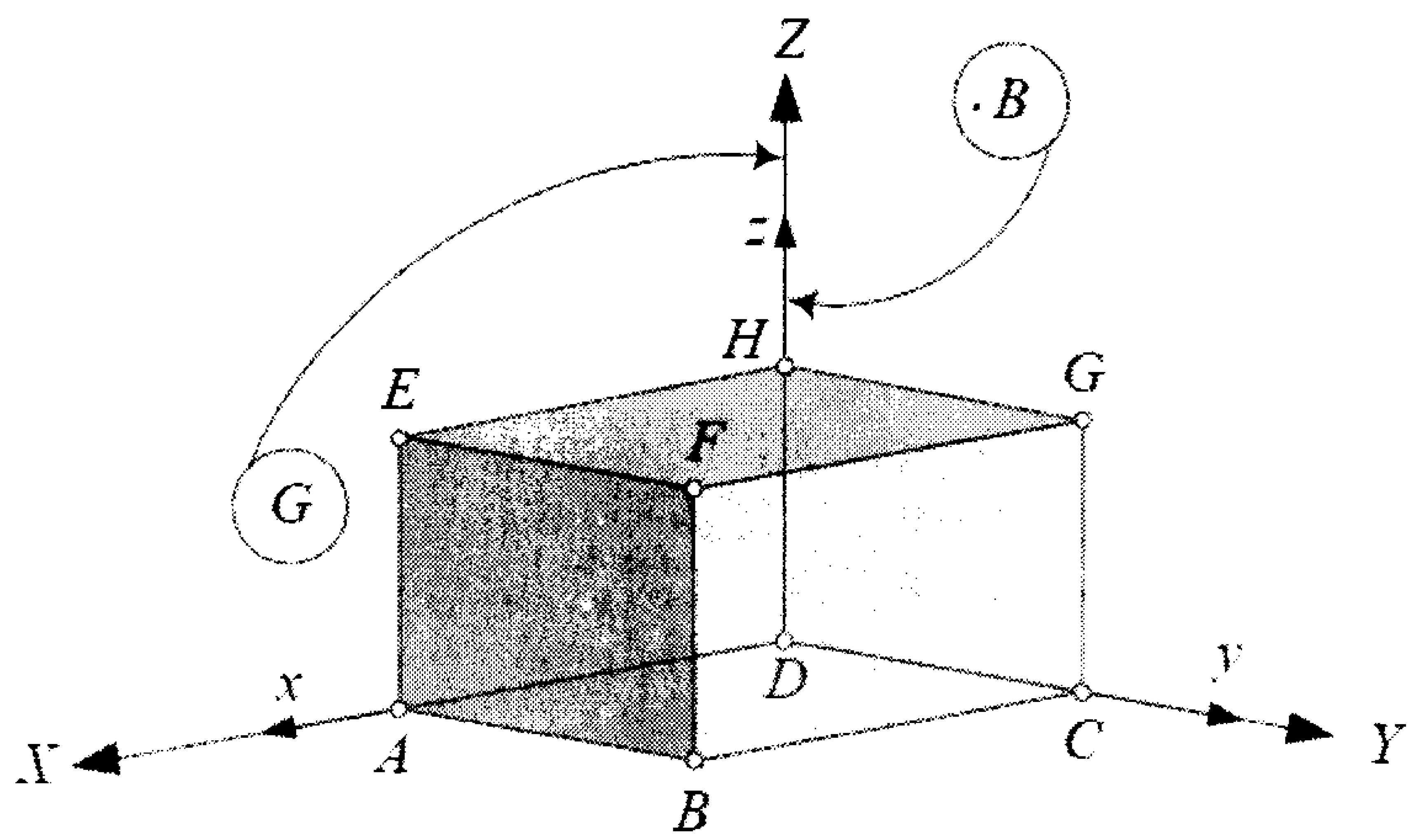
Time: 90 minutes

Question 1 (1.5 đ): Calculate the number of degree of freedom (DOF) of the following mechanism by

a) Using intuition (for example, explain by fixing one link and consider the movement of other links in mechanism) (0.5 đ)
b) Using Grubler/Kutzbach formula (1 đ)



Question 2 (4 đ): A cube is at the initial position which **D** is coincident with the origin **O** of global frame G. The local frame B is attached to the cube. The length of edges is $l = 1$.



With a fixed point at **D**, we rotate the cube 45 degree about X-axis, 15 degree about Y-axis and 75 degree about Z-axis.

a) Determine the global position of **E** and **G** after three rotations? (1.5 đ)
b) Determine a unique rotation with unique axis to get the same result in a)? (0.5 đ)
c) Determine the Euler angles that give the same result in a)? (0.75 đ)

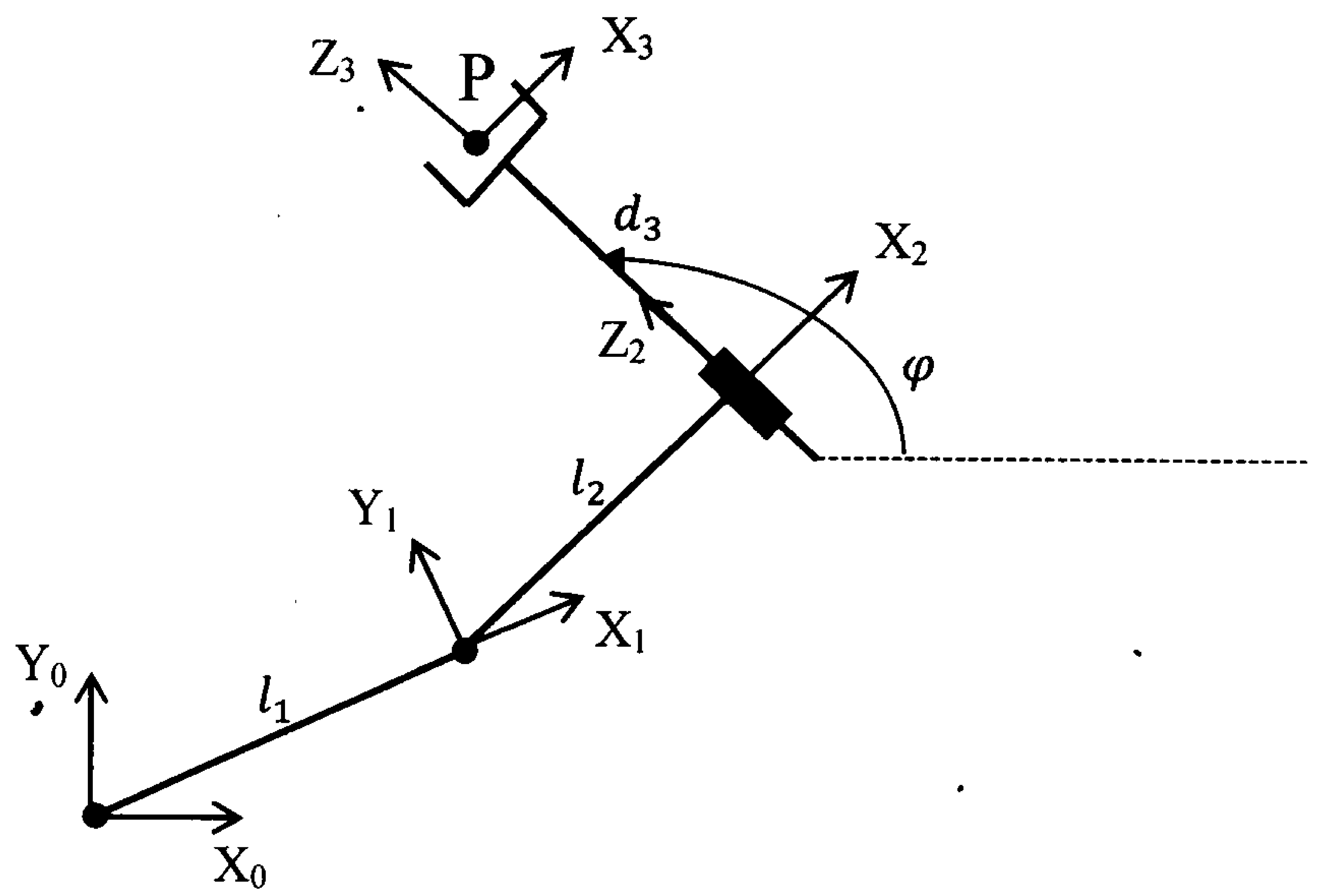
Next, we do following movements: move the cube 10 along X-axis, 15 along Y-axis, and 20 along Z-axis.

d) Determine the global position of **F** after these movements? (0.5 đ)

Given a point **P** in global frame after these above movement as follows ${}^{G}\boldsymbol{r}_P = [20 \quad 5 \quad 10]^T$

e) Determine the local position of **P** in local frame B? (0.75 đ)

<u>Question 3 (4.5 đ)</u>: We have a planar 3-DOF robot (RRP) and attach the frames to the robot as follows, which (X_0,Y_0) is global frame.



Using the above position of frames.

a) Find the DH table? (0.75 đ)
b) Calculate individual transformation matrices ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$? (0.75 đ)
c) Calculate the total transformation matrix ${}^{0}\boldsymbol{T}_3$?(0.5 đ)

Call (X_P,Y_P) and φ are position and orientation of end effector.

d) Find global position and orientation of the end-effector? (0.5 đ)

Assume we have the value of X_P, Y_P, and φ in global frame.

e) Solve the inverse kinematic of the robot? (1 đ)

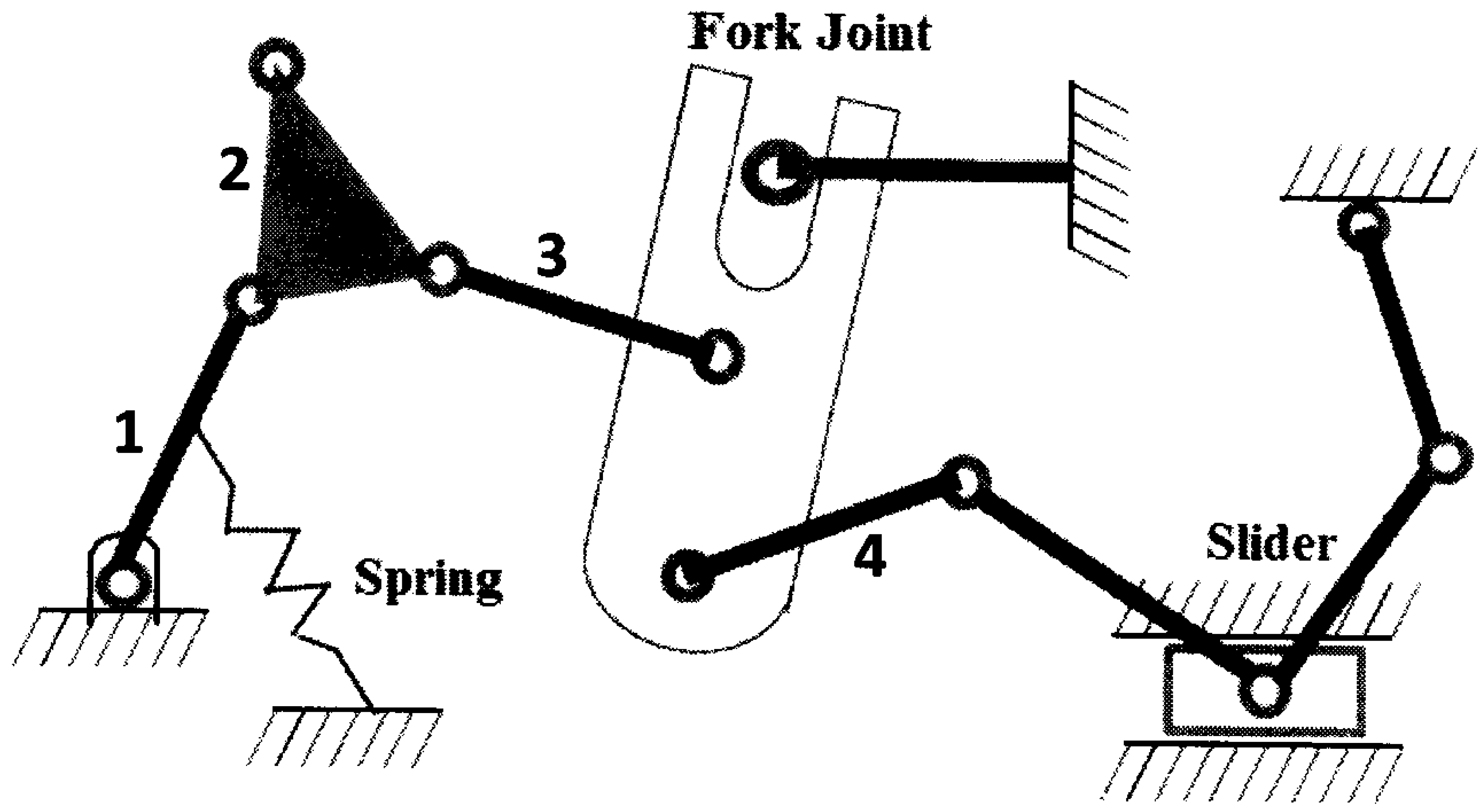
f) Calculate the Jacobian matrix of the robot, including position Jacobian and orientation Jacobian? (1 đ)

End of paper

Head of Department | Course Instructor

Đáp án

Câu 1:



a) Ta có thể cố định lần lượt các khâu như sau:

- Cố định khâu 1: hệ vẫn còn chuyển động
- Cố định khâu 1 và 2: hệ vẫn còn chuyển động
- Cố định khâu 1, 2 và 3: hệ vẫn còn chuyển động
- Cố định khâu 1, 2, 3 và 4: hệ đứng yên

Vậy hệ có 4 bậc tự do (0.5đ)

b) Sử dụng công thức Grubler/Kutzbach, ta có

$$F = 3(10 - 12 - 1) + \sum_{i=1}^{11} 1 + 2 = 4$$

(1đ)

Câu 2:

a) Sau 3 lần quay thì ma trận biến đổi tổng là

$$^{G}R_B = Q_{Z,75}Q_{Y,15}Q_{X,45}$$

$$Q_{Z,75} = \begin{bmatrix} \cos 75^0 & -\sin 75^0 & 0 \\ \sin 75^0 & \cos 75^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2588 & -0.9659 & 0 \\ 0.9659 & 0.2588 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

$$Q_{Y,15} = \begin{bmatrix} \cos 15^0 & 0 & \sin 15^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 15^0 & 0 & \cos 15^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9659 & 0 & 0.2588 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2588 & 0 & 0.9659 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

$$Q_{X,45} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^0 & -\sin 45^0 \\ 0 & \sin 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

$$\Rightarrow {}^{G}R_B = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.6356 & 0.7304 \\ 0.933 & 0.3598 & -0.0062 \\ -0.2588 & 0.683 & 0.683 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

Tọa độ toàn cục của **E** trong *G* là

$${}^{G}r_E = {}^{G}R_B\,{}^{B}r_E = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.6356 & 0.7304 \\ 0.933 & 0.3598 & -0.0062 \\ -0.2588 & 0.683 & 0.683 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9804 \\ 0.9268 \\ 0.4242 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

Tọa độ toàn cục của **G** trong *G* là

$${}^{G}r_G = {}^{G}R_B\,{}^{B}r_G = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.6356 & 0.7304 \\ 0.933 & 0.3598 & -0.0062 \\ -0.2588 & 0.683 & 0.683 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0947 \\ 0.3536 \\ 1.366 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

b) Góc quay ϕ được xác định như sau

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1) = 0.1464$$

$$\Rightarrow \phi \doteq 81.5816^0 \qquad (0.25đ)$$

Trục quay được xác định như sau

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\sin\phi}\left({}^{G}R_B - {}^{G}R_B^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & -0.7929 & 0.5 \\ 0.7929 & 0 & -0.3484 \\ -0.5 & 0.3484 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \begin{bmatrix} 0.3484 \\ 0.5 \\ 0.7929 \end{bmatrix} \qquad (0.25đ)$$

c) Từ câu a) ta có

$$^{B}R_{G}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.933 & -0.2588\\ -0.6356 & 0.3598 & 0.683\\ 0.7304 & -0.0062 & 0.683\end{bmatrix}$$

Từ đó ta tính các góc Euler như sau

$$\theta = cos^{-1}(r_{33}) = cos^{-1}(0.683) = 46.9215^{0}$$ (0.25đ)

$$\varphi = -tan^{-1}\left(\frac{r_{31}}{r_{32}}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{0.7304}{-0.0062}\right) = 89.5137^{0}$$ (0.25đ)

$$\psi = tan^{-1}\left(\frac{r_{13}}{r_{23}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-0.2588}{0.683}\right) = -20.7525^{0}$$ (0.25đ)

d) Ta có ma trận biến đổi thuần nhất từ *B* sang *G* là

$$^{G}T_{B}=\begin{bmatrix}0.25 & -0.6356 & 0.7304 & 10\\ 0.933 & 0.3598 & -0.0062 & 15\\ -0.2588 & 0.683 & 0.683 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ (0.25đ)

Tọa độ của **F** trong *G* là

$$^{G}r_{F} = {}^{G}T_{B}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.25 & -0.6356 & 0.7304 & 10\\ 0.933 & 0.3598 & -0.0062 & 15\\ -0.2588 & 0.683 & 0.683 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10.3447\\16.2866\\21.1072\\1\end{bmatrix}$$ (0.25đ)

e) Ta có ma trận biến đổi thuần nhất từ *G* sang *B* là

$$^{B}T_{G} = {}^{G}T_{B}^{-1} = \begin{bmatrix}{}^{G}R_{B}^{T} & -{}^{G}R_{B}^{T}\,{}^{G}d\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.25 & 0.933 & -0.2588 & -11.3188\\ -0.6356 & 0.3598 & 0.683 & -12.7006\\ 0.7304 & -0.0062 & 0.683 & -20.8705\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ (0.5đ)

Tọa độ của **P** trong *B* là

$$^{B}r_{P} = {}^{B}T_{G}\,{}^{G}r_{P} = \begin{bmatrix}0.25 & 0.933 & -0.2588 & -11.3188\\ -0.6356 & 0.3598 & 0.683 & -12.7006\\ 0.7304 & -0.0062 & 0.683 & -20.8705\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\5\\10\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4.2419\\-16.7845\\0.536\\1\end{bmatrix}$$ (0.25đ)

Câu 3:

a) Bảng DH của robot như sau (0.75đ)

No.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	-90^0	0	θ_2
3	0	0	d_3	0

(Đúng mỗi hàng được 0.25đ)

b) Ta có các ma trận con như sau

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.25đ)

$$^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.25đ)

$$^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.25đ)

c) Ma trận biến đổi tổng là

$$^0T_3 = {}^0T_1\, {}^1T_2\, {}^2T_3$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_1+\theta_2) & l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) - d_3\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & \cos(\theta_1+\theta_2) & l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + d_3\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.5đ)

d) Vị trí của khâu tác động cuối là: (0.25đ)

$$X_P = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + d_3\cos(\theta_1+\theta_2+90^0)$$
$$= l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) - d_3\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$Y_P = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + d_3\sin(\theta_1+\theta_2+90^0)$$
$$= l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + d_3\cos(\theta_1+\theta_2)$$

f) Ma trận Jacobian thỏa mãn phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Ma trận jacobian về vị trí có thể tính từ X và Y (0.5đ)

$$J_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial X}{\partial d_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Y}{\partial d_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}$$

(Viết đúng mỗi hàng được 0.25đ)

Ma trận Jacobian về hướng tính từ φ

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (0.25đ)

Vậy ma trận Jacobian tổng là (0.25đ)

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$